LK Mathematik

Jahrgangsstufe 11	Stundenzahl:	**160**
11/I: Analysis		
Lernbereich 1: Zahlenfolgen, Grenzwerte		30
Lernbereich 2: Differentialrechnung		50
11/II: Analysis II		
Lernbereich 1: Integralrechnung		40
Lernbereich 2: Anwendung der Infinitesimalrechnung auf weitere Klassen von Funktionen		40
Jahrgangsstufe 12		**140**
12/I: Geometrie/Algebra		
Lernbereich 1: Koordinatengeometrie der Ebene		18
Lernbereich 2: Lineare Gleichungssysteme		12
Lernbereich 3: Vektoren		15
Lernbereich 4: Affine Geometrie in der Ebene und im Raum		15
Lernbereich 5: Metrische Geometrie der Ebene und des Raumes		20
12/II: Stochastik		
Lernbereich 1: Zufällige Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeit		25
Lernbereich 2: Zufallsgrößen und ihre Charakteristiken		20
Lernbereich 3: Elemente der Beurteilenden Statistik		15

LK Mathematik

11/I: Analysis

Lernbereich 1: Zahlenfolgen, Grenzwerte 30

Der Schüler lernt Zahlenfolgen als spezielle Funktionen kennen. Ein wichtiges Ziel dieses Lernbereichs ist das gründliche Erfassen des Begriffs „Grenzwert“ als wesentliche Voraussetzung für das Verstehen der Infinitesimalrechnung.

Zahlenfolgen

Zahlenfolgen als spezielle Funktionen

Explizit und rekursive Bildungsvorschrift

Eigenschaften von Zahlenfolgen: Monotonie, Beschränktheit

Arithmetische und geometrische Folgen als spezielle Zahlenfolgen
(Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik)

Ausblick auf Zinseszinsrechnung (Zinsrechnung)

Reihen als Partialsummenfolgen Umgang mit dem Summenzeichen

Grenzwerte

Z Grenzwert einer Zahlenfolge

Z Grenzwertsätze für Folgen

Grenzwerte bei Funktionen:

- Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

- Verhalten von Funktionen für $x \rightarrow +\infty$ und $x \rightarrow -\infty$

Grenzwertsätze für Funktionen

Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle

Stetigkeit einer Funktion in einem Intervall

Sätze über stetige Funktionen: Zwischenwertsatz, Satz von Maximum und Minimum
(Anwendung zum Nachweis der Existenz von Nullstellen)

Z Beweisverfahren der vollständigen Induktion

LK Mathematik

11/I: Analysis

Lernbereich 2: Differentialrechnung 50

Der Schüler lernt die exakte Definition des Differentialquotienten kennen; die Einführung des Begriffs sollte jedoch sowohl geometrisch als auch physikalisch motiviert werden.
Der Schüler vermag das Änderungsverhalten einer geeigneten Funktion durch eine Funktion zu beschreiben. Das Beweisen der wichtigsten Sätze ist anzustreben; dabei sollten Veranschaulichungen das Verständnis der Herleitungen unterstützen.
Wesentliche Ziele des Unterrichts sind eine sichere Beherrschung der Ableitungsregeln sowie die bewusste Anwendung der erworbenen Mittel der Differentialrechnung bei der Durchführung von Kurvendiskussionen und beim Lösen von Extremwertaufgaben.

Differenzierbarkeit

Ableitung einer Funktion an einer Stelle (PH, Jahrgangsstufe 11,LB 1,Geschwindigkeit)

Tangente im Kurvenpunkt (Monotoniekriterien für differenzierbare Funktionen)

Anstieg

Differentialquotient

Differenzierbarkeit (G. W. LEIBNITZ (1646 – 1716), I. NEWTON (1643 – 1727), L. EULER (1707 – 1783))

Ableitung einiger ausgewählter Funktionen nach Definition
(Gedacht ist an Funktionen mit den Gleichungen: $y = x^2$; $y = x^3$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \sqrt{x}$)

Ableitung einer Potenzfunktion (Mangels Voraussetzbarkeit des binomischen Satzes nur Hinweis auf Beweismöglichkeit in Analogie zu den ausgewählten Beispielen)

Ableitung einer konstanten Funktion

Ableitung der Summe zweier Funktionen

Ableitung des Vielfachen einer Funktion

Produktregel
Quotientenregel

Ableitung der Umkehrfunktion
Ableitung der Wurzelfunktion

Kettenregel

Ableitung ganzrationaler und gebrochenrationaler Funktionen

Ableitungen höherer Ordnung

Geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung

(Erster) Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Zusammenhang von Stetigkeit und Differenzierbarkeit
(Auch Demonstration an Betragsfunktionen)

LK Mathematik

Anwendungen

Kurvenuntersuchungen:
Symmetrieverhalten,
gerade und ungerade Funktionen;
Nullstellen (Bestimmung auch durch Dividieren von Polynomen),
Polstellen;
Verhalten im Unendlichen (einschließlich Asymptoten);
lokale und globale Extrema;
Wendepunkte (mit Wendetangenten);
Monotoniebereiche bei
- rationalen Funktionen;
- Wurzelfunktionen;
- Scharen solcher Funktionen

Umgekehrt ist auch an das Auffinden ganzrationaler Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften gedacht (Interpolationspolynome).

Newtonsches Iterationsverfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen

Extremwertaufgaben
(Aufstellen der Zielfunktion, Nutzen des grafikfähigen Taschenrechners für Extremwertbestimmung
Orientierung auf vielfältige Anwendungen (Geometrie, Physik, Technik, Wirtschaft))

Z Lösen von Extremwertaufgaben ohne Verwendung der Differentialrechnung

LK Mathematik

11/II: Analysis II

Lernbereich 1: Integralrechnung 40

Unbestimmtes Integral

Stammfunktion

Unbestimmtes Integral

Stammfunktion eines Vielfachen einer Funktion

Stammfunktion einer Summe von Funktionen

Bestimmtes Integral

Bestimmtes Integral (R. RIEMANN (1826 – 1866))

Geometrische und physikalische Deutungen (PH, Jahrgangsstufe 11,Lernbereich 1, Arbeit)

Eigenschaften des Integrals

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Geometrische Interpretation

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Technik des Integrierens (Beschränkung auf einige typische Anwendungsfälle)

Integration ganzrationaler Funktionen

Integration durch Substitution

Partielle Integration

Anwendungen

Berechnung von Flächeninhalten (An Beispielen Hinweis auf uneigentliche Integrale)

Berechnung des Volumens von Rotationskörpern

Z Numerische Integrationsverfahren

LK Mathematik

11/II: Analysis II

Lernbereich 2: Anwendung der Infinitesimalrechnung auf weitere Klassen von Funktionen 40

Trigonomische Funktionen

Winkelfunktionen (MA, Klassenstufe 10, Lernbereich 4)

Ableitung und Stammfunktion trigonometrischer Funktionen

Kurvenuntersuchungen, auch für einfache Verkettungen mit bisher behandelten Funktionen, insbesondere für Funktionen vom Typ y= a sin (bx+c)

Flächeninhalts- und Volumenberechnungen

Extremwertaufgaben

Z Ausblick auf die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung
(PH, Jahrgangsstufe 11, Lernbereich 1, Pendel)

Logarithmusfunktion

Die natürliche Logarithmusfunktion y= ln x
(MA, Klassenstufe 10, Lernbereich 3)

Die Zahl e Definition, Grenzwertdarstellung (L. EULER (1707 – 1783) Hinweis auf spätere Berechnungsmöglichkeiten für e)

Die allgemeine Logarithmusfunktion

Ableitung und Stammfunktion der Logarithmusfunktion (Vergleiche Lernbereich 1: Partielle Integration

Integrale, als deren Stammfunktion eine Logarithmusfunktion auftritt, auch $\frac{f'(x)}{f(x)}dx$)

Kurvenuntersuchungen (einschließlich Verkettung von Logarithmusfunktion und anderen behandelten Funktionen)

Berechnung von Flächeninhalten

Extremwertaufgaben

Exponentialfunktionen

Die Exponentialfunktion (MA, Klassenstufe 10, Lernbereich 3)

Ableitung und Stammfunktion der Exponentialfunktion, insbesondere der Funktion $y = e^x$

Exponential- und Logarithmusfunktion als Umkehrfunktionen voneinander

Kurvenuntersuchungen, auch für Verkettungen von Exponentialfunktion und anderen behandelten Funktionen

Berechnung von Flächen- und Rauminhalten

Anwendungen: Extremwertaufgaben, Wachstumsprozesse
(PH, Jahrgangsstufe 12, Lernbereich 1, Radioaktiver Zerfall, Halbwertzeit)

Z Ausblick auf weitere Differentialgleichungen Lösen der Differentialgleichung y’=k y

LK Mathematik

12/I: Geometrie/Algebra

Es wird empfohlen, das Thema Geometrie/Algebra mit der Behandlung von Vektoren zu beginnen und die Betrachtungen aus den Gebieten Koordinatengeometrie, affine Geometrie und metrische Geometrie parallel durchzuführen.

Lernbereich 1: Koordinatengeometrie der Ebene 18

Der Schüler lernt ein Koordinatensystem als Mittler zwischen geometrischen Objekten und analytischen Objekten, als einen „Übersetzer" geometrischer Aussagen in analytische Aussagen und umgekehrt kennen; er lernt, geometrische Probleme in analytische Aussagen und Probleme zu verwandeln, sie in dieser Gestalt zu lösen und das Ergebnis wiederum geometrisch zu deuten. Er wird dabei mit dem Gedanken der mathematischen Modellierung bekannt. Er lernt, das ihm bereits geläufige rechtwinklige kartesische Koordinatensystem als Spezialfall allgemeinerer Koordinatisierung zu betrachten. Als geometrische Objekte werden Punkte, Geraden und Kreise betrachtet.

Punkte im Koordinatensystem

Parallelkoordinaten: Eineindeutige Zuordnung von Punkt und geordnetem Zahlenpaar
(R. DESCARTES (1596 – 1650) - Anzuknüpfen ist an Begegnungen des Schülers mit dem Koordinatensystem
bei der Behandlung von Funktionen und ihren Grafen ab Klassenstufe 8.)
Z Andere Koordinatensysteme Ausblick auf Parallelkoordinaten im Raum
(Beispiel: Polarkoordinaten Hinweis auf Kugelkoordinaten GEO, Jahrgangsstufe 11, Lernbereich 1, Bau des Erdkörpers

Abstand zweier Punkte
(Von hier an Beschränkung auf ein rechtwinkliges System, nur Ausblicke auf den Allgemeinfall
MA, Klassenstufe 8, Lernbereich 8, Satz des Pythagoras

Teilung einer Strecke in gegebenem Verhältnis

Mittelpunkt einer Strecke

Schwerpunkt eines Dreiecks

Dreiecksinhalt (MA, Klassenstufe 7, Lernbereich 4, Flächeninhalt von Dreieck und Trapez)

Kollinearität dreier Punkte

Geraden

Die Gerade (MA, Klassenstufe 8, Lernbereich 2)

Steigungswinkel, Anstieg, Achsenabschnitte

Formen der Geradengleichung: Zweipunkteform, Punktrichtungsform; allgemeine Form, explizite Form, Achsenabschnittsform
(Die durch Behandlung der linearen Funktion entstandene Favorisierung der expliziten Form sollte überwunden werden.)

Zwei Geraden (MA, Klassenstufe 9, Lernbereich 2, Lineare Gleichungssysteme)
Schnittpunkt, Schnittwinkel Parallelität und Orthogonalität

Z Geradenbüschel

Kreise

Der Kreis (MA, Klassenstufe 8,Lernbereich 4, Tangentenkonstruktion)

Kreis und Gerade

Tangente in einem Punkt des Kreises

Tangenten von einem Punkt außerhalb an den Kreis (analytisch und konstruktiv)
(Hinweis auf Pol und Polare möglich)

Z Inversion am Einheitskreis

Lernbereich 2: Lineare Gleichungssysteme 12

Der Schüler lernt, lineare Gleichungssysteme (kleiner Dimension) mit Hilfe des Gaußschen Eliminierungsverfahrens zu lösen. Er begegnet Anwendungen innerhalb und außerhalb der Mathematik. Er gewinnt auf diesem Gebiet sichere Fertigkeiten.
Betrachtungen zur Struktur der Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems bereiten den Begriff des linearen Vektorraumes vor.

Zwei (unabhängige) Gleichungen mit zwei Variablen (Standardfall)
(Empfohlen wird die Motivierung durch Schnitt zweier Geraden (Lernbereich 1). Dabei können die Cramersche Regel für n = 2 elementar gewonnen und die zweireihige Determinante als nützliche Abkürzung eingeführt werden.

Verallgemeinerung auf n = 3 (Standardfall)
(Analoge Betrachtungen)

Widersprüchliche und überbestimmte lineare Gleichungssysteme (Nichtstandardfälle)
(Gedacht ist wieder an eine geometrische Motivierung der Fallunterscheidungen.)

Das Gaußsche Eliminierungsverfahren als algorithmische Lösungsmethode Äquivalente Umformungen

Transformation auf Trapezgestalt

Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme
(Die allgemeinen Aussagen über lineare Gleichungssysteme werden lediglich verfahrensabhängig aus dem Gauß-Verfahren gewonnen.)

Homogene und inhomogene Systeme

Struktur der Lösungsmenge (Möglichkeit der Konstruktion der Lösung aus speziellen Lösungen Vergleiche Lernbereich 4: Gleichung von Gerade und Ebene)

Lösbarkeitskriterium

Anwendungen

Z Einfachste Beispiele von linearen Gleichungssystemen mit äußerem Parameter (Fallunterscheidungen)

LK Mathematik

Lernbereich 3: Vektoren 15

Der Schüler erkennt, dass man mit Verschiebungen, mit Pfeilklassen sowie mit Paaren bzw. Tripeln reeller Zahlen so rechnen kann, dass immer dieselben Rechengesetze gelten. Er bemerkt, dass die Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems denselben Gesetzen genügen. Der Schüler erlangt auf dem Weg der Verallgemeinerung zum Begriff des linearen Vektorraums. Er kann die zuvor betrachteten Objektmengen als Modelle einordnen. Er gewinnt damit den Eindruck vom Wert der Einführung abstrakter Strukturen.

Vektoren im Anschauungsraum (Pfeilklassenmodell)

Addition (und Subtraktion) von Vektoren (PH, Jahrgangsstufe 11, Lernbereich 1, Vektorielle Größen)

Vervielfachung eines Vektors mit einer reellen Zahl

Rechengesetze
Linearkombination von Vektoren (Beschränkung auf geometrische Sicht)
Komponentenzerlegung

Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit (Es ist nur an eine rein geometrische Betrachtung gedacht.)

Basis, Koordinatensystem, Einheitsvektor, Ortsvektor, Betrag eines Vektors
Komponenten und Koordinaten eines Vektors

Gewinnung des Begriffs „linearer Vektorraum“ aus Modellen
(Pfeilklassen, Verschiebungen, Paare bzw. Tripel reeller Zahlen, Lösungen eines homogenen linearen Gleichungssystems)

Z Weitere Modelle und physikalische Anwendungen
Z Einfachste Folgerungen aus den Axiomen des Vektorraums
Z Gruppenbegriff

Lernbereich 4: Affine Geometrie in der Ebene und im Raum 15

Der Schüler erkennt, dass die Verwendung von Vektoren eine sehr einfache Beschreibung der Geraden und Ebenen des Raumes gestattet. Er lernt typisch affine Fragestellungen nach Parallelität und Teilverhältnis und deren analytische Beantwortung kennen.

Punkte
Ortsvektoren

Punktraum
Affiner Punktraum A_n Affines Koordinatensystem
(n = 2 oder n = 3 Vergleiche Lernbereich 1)

Geraden

Die Gerade im Raum und in der Ebene
Parameterdarstellung
Parameterfreie Darstellung im A^2
Mögliche Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene und im Raum

Ebenen

Die Ebene im Raum
Parameterdarstellung
Parameterfreie Darstellung
Lagebeziehungen zweier Ebenen im Raum

(Vollständige Falldiskussion mit Hilfe von Kenntnissen aus dem Lernbereich 2)

Z Lagebeziehungen dreier Ebenen im Raum

Schnitt von Gerade und Ebene, insbesondere Durchstoßpunkte einer Geraden durch die Koordinatenebenen

Geometrische Anwendungen

Mittelpunkt, Schwerpunkt eines Dreiecks (Enger Bezug zu Lernbereich 1)

Z Ortsvektor des Teilpunktes einer Strecke

Kollinearität, Komplanarität

Beweis einiger Sätze der affinen Geometrie (Beispiele: Sätze am Parallelogramm)

Lernbereich 5: Metrische Geometrie der Ebene und des Raumes 20

Die affine Betrachtungsweise erfährt eine wesentliche Ergänzung durch Einführung des Skalarproduktes, welches nun die Lösung metrischer Probleme gestattet. Der Schüler lernt das Skalarprodukt als ein außerordentlich nützliches Instrumentarium zur Beschreibung geometrischer wie auch physikalischer Begriffe und Sachverhalte kennen.

Skalarprodukt

Skalarprodukt im Anschauungsraum
Definition und Eigenschaften
Koordinatendarstellung
Betrag eines Vektor
Einheitsvektoren

Anwendungen in der Geometrie
Länge der orthogonalen Projektion eines Vektors in eine gegebene Richtung

Abstände
(Punkt – Punkt, Punkt – Gerade, Punkt – Ebene, Gerade – Gerade, Gerade – Ebene, Ebene – Ebene)

Schnittwinkel (Gerade – Gerade, Gerade – Ebene, Ebene – Ebene)

Stellungsvektor einer Ebene

Hessesche Normalenform der Ebenengleichung im Raum (bzw. der Geradengleichung in der Ebene)

Beweis einiger Sätze der euklidischen Geometrie
(Beispiele: MA, Klassenstufe 8, Lernbereich 1, Binomische Formeln
MA, Klassenstufe 10, Lernbereich 5, Kosinussatz
MA, Klassenstufe 7, Lernbereich 4, Rhombus)

Anwendungen in Physik und Technik

Zerlegung eines Vektors in Parallel und Normalenkomponente bezüglich eines anderen Vektors
(PH, Klassenstufe 7, Lernbereich 1, Geneigte Ebene)

Der physikalische Begriff der Arbeit
(PH, Jahrgangsstufe 11, Lernbereich 1, Arbeit)

Z Vektorprodukt, Dreiecksinhalt, Abstand windschiefer Geraden, Stellungsvektor, physikalische Anwendungen
Z Spatprodukt, Spat- und Tetraedervolumen, metrische Komplanaritätsbedingung für vier Punkte
Z Kreise und Kugeln, Gleichung von Kreis und Kugel, Tangente, Tangentialebene
Z Stereographische Projektion

LK Mathematik

12/II: Stochastik

Lernbereich 1: Zufällige Ereignisse und deren Wahrscheinlichkeit 25

Bei der Erfassung zufallsbedingter Erscheinungen unserer Wirklichkeit spielen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik eine immer größere Rolle. Der Schüler soll – aufbauend auf den Kenntnissen aus der Sekundarstufe I – Einsichten in die charakteristischen Denkweisen der Stochastik erlangen. Er lernt mathematische Modelle kennen, die geeignet sind, über zufallsbedingte Phänomene Aussagen zu machen und Vorhersagen mit einem bestimmten Grad von Zuverlässigkeit zu treffen. Im Lernbereich 1 stehen dabei die Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sowie das Berechnen von und das Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten im Vordergrund.

Zufallsexperiment, Ergebnis (Simulation von Zufallsexperimenten,auch unter Nutzung des Computers, Hinweis auf unendliche Ergebnismengen)

Ergebnismenge

Zufällige Ereignisse
Operationen mit zufälligen Ereignissen

Ereignisraum bzw. –feld

Definitionsversuche zur Wahrscheinlichkeit (Historische Entwicklung)
Axiome von Kolmogorow (A. N. KOLMOGOROW, (1903 – 1987) Vorzüge und Nachteile dieser Definition)

Verschiedene Zugänge zum Begriff der Wahrscheinlichkeit:

- Statistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff (Eingehen auf relative Häufigkeit)
(Verwenden von Hilfsmitteln der Kombinatorik, Nutzen von Zähl- und Pfadregeln, Arbeit mit Urnenmodellen)

- Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff (Laplace-Wahrscheinlichkeit)
(Eingehen auf den geometrischen Wahrscheinlichkeitsbegriff P. S. LAPLACE (1749 – 1827)

Additionssatz

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeit

Satz über die totale Wahrscheinlichkeit und Bayes'sche Formel
(Plausibilitätsbetrachtungen über Baumdiagramme T. BAYES (1702 – 1761))

Unabhängigkeit zufälliger Ereignisse
Multiplikationssatz
(Zuverlässigkeitstheorie (Reihen- und Parallelsysteme))

LK Mathematik

Lernbereich 2: Zufallsgrößen und ihre Charakteristiken 20

Der Schüler lernt die „Zufallsgröße“ als eine auf dem Ereignisraum definierten Funktion kennen und wird in die Lage versetzt, die sie charakterisierenden Parameter zu berechnen. Als praxisrelevante Anwendungen werden spezielle Verteilungen (Gleich- und Binomialverteilung) behandelt, um entsprechende Sicherheit in der Ermittlung der Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion sowie der Berechnung der zugehörigen Kenngrößen (Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung) zu erlangen. Außerdem soll der Schüler verstehen, dass die Normalverteilung häufig eine geeignete Approximation der Binomialverteilung darstellt.

Diskrete und stetige Zufallsgrößen

Charakteristiken von Zufallsgrößen:
- Wahrscheinlichkeitsfunktion
- Verteilungsfunktion
- **Z** Dichtefunktion

Kenngrößen von Zufallsgrößen: (Beschränkung auf diskrete Zufallsgrößen)

- Erwartungswert
- Varianz, Standardabweichung

Diskrete Gleichverteilung

Binomialverteilung (Jakob BERNOULLI (1655 – 1705))

Normalverteilung und Binomialverteilung

*Ungleichung von Tschebyschow (*P. L. TSCHEBYSCHOW(1821 – 1894))

Gesetz der großen Zahlen

Lernbereich 3: Elemente der Beurteilenden Statistik 15

Der Schüler soll in diesem Abschnitt Grundbegriffe und Methoden der Beurteilenden Statistik kennen lernen und auf praxisbezogene Probleme anwenden können. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird von einer gegebenen Stichprobe auf die Grundgesamtheit geschlossen. Die Zuverlässigkeit statischer Betrachtungsweisen und ihre Aussagekraft in der gegebenen Situation soll der Schüler kritisch beurteilen lernen.

Grundproblem der Beurteilenden Statistik

Grundgesamtheit, Stichproben vom Umfang n zu einer Zufallsgröße

Parameterschätzung (Erwartungstreue Schätzfunktionen)
(Auch: Bestimmung der Stichprobengröße bei gegebenem Genauigkeitsintervall)

Aufstellen und Prüfen von Hypothesen

Spezielle Tests für Parameter
(Gedacht ist an Binomial- und Normalverteilung (möglicherweise Beschränkung auf einen Verteilungstyp).)

Erörterung der Fehler 1. und 2. Art

Z Spezielle parameterfreie Tests

Z Schätzen bzw. Testen durch Simulation