Trainingsaufgaben für die Mathematik-Olympiade

zur Vorbereitung auf die 4. Stufe der Mathematik-Olympiade, Olympiadeklasse 9 - Teil 3

Z a h l e n t h e o r i e

17) [450941 – 42%]

Wie viele ganze Zahlen n mit $\frac{2^{2005}}{45} < n \leq 2^{2005}$ gibt es, welche sich in der Form $2^a \cdot 45^b$ mit ganzen Zahlen a, b darstellen lassen?

18) [440942 –38%]
Die Menge M bestehe aus 15 verschiedenen natürlichen Zahlen, die alle größer als null und kleiner als 2005 sind.
Beweisen Sie, dass es stets möglich ist, aus einer solchen Menge M zwei elementfremde nicht leere Teilmengen so auszuwählen, dass die Summe der Elemente der einen gleich der Summe der Elemente der anderen ist.

19) [470941 – 36%]
Matthias hat auf einem alten Zettel die Aufgabe gefunden, vier ganze Zahlen a, b, c, d zu ermitteln, die der Gleichung

$$\frac{1}{47}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = ab + ac + ad + bc + bd + cd \qquad (1)$$

genügen.

a) Auf dem Zettel findet sich bereits eine Lösung, nämlich b = 3, c = 2 und d = -3; nur der Wert von a ist unleserlich. Welche Werte kommen für a in Frage?

b) Beweisen Sie, dass für alle ganzen Zahlen a, b, c, d, welche die Gleichung (1) erfüllen, auf beiden Seiten der Gleichung eine Quadratzahl steht.

c) Beweisen Sie, dass es für jede Quadratzahl q ein Quadrupel (a; b; c; d) von ganzen Zahlen gibt, für welches die Gleichung (1) erfüllt ist und auf beiden Seiten der Wert q steht.

20) [490944 – 34%]
Ermitteln Sie alle Paare (a; b) positiver ganzer Zahlen mit $a < b$, für welche die quadratischen Terme $x^2 + ax + b$ und $x^2 + bx + a$ beide als Produkte linearer Terme mit ganzzahligen Koeffizienten geschrieben werden können.

Hinweis: Der Term $3x + \frac{1}{2}$ ist linear, aber nicht alle seine Koeffizienten sind ganzzahlig.

21) [510946 - 27%]
Ermitteln Sie alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, für die

$$\frac{a+1}{a} + \frac{b}{b+1} = \frac{b+2}{a+1}$$

gilt.

22) [490946 – 15%]
a) Man ermittle die kleinste positive ganze Zahl y, für die es eine ganze Zahl x gibt, so dass die Ungleichungskette

$$\frac{41}{2010} < \frac{x}{y} < \frac{1}{49}$$

erfüllt ist.

b) Es seien zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ mit $q \cdot r - p \cdot s = 1$ und $p, q, r, s > 0$ gegeben. Ermitteln Sie auch hier die kleinste positive ganze Zahl y, für die es eine ganze Zahl x gibt, so dass die Ungleichungskette

$$\frac{p}{q} < \frac{x}{y} < \frac{r}{s}$$

erfüllt ist.

A r i t h m e t i k

5) [520943 – 35%]
Ermitteln Sie alle reellen Lösungen (x; y; z) des Gleichungssystems

$$x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z} = z - \frac{1}{x}.$$

6) [460941 – 30%]
Ermitteln Sie alle Tripel (x; y; z) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem lösen:

$$x + y + z = 1, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1. \qquad (2)$$

7) [480943 – 20%]
Ermitteln Sie alle Paare (x; y) reeller Zahlen, die den folgenden drei Bedingungen genügen:

(1) $(1 + x^3)(1 + y^3) = 1$,

(2) $\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}$ ist rational,

(3) $\sqrt[3]{x \cdot y \cdot (x+y)}$ ist rational.

8) [500943 – 19%]
Es seien a und b reelle Zahlen mit $3a \geq b$ und $3b \geq a$. Man beweise, dass alle Wurzeln in der Ungleichung

$$\sqrt{a+b} \cdot (\sqrt{3a-b} + \sqrt{3b-a}) \leq 4 \cdot \sqrt{a \cdot b}$$

definiert sind und dass die Ungleichung gültig ist.

G e o m e t r i e

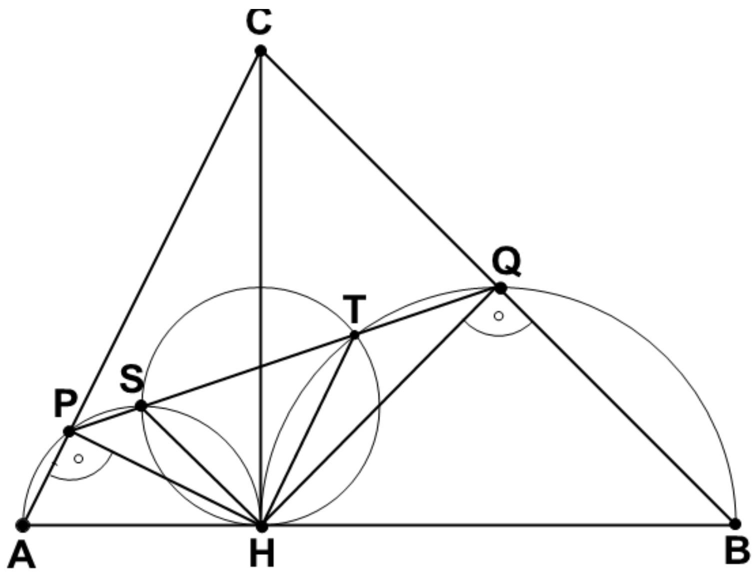
16) [400943 – 38%]

a) Einem Kreis k sei ein Viereck ABCD einbeschrieben. Die Längen seiner Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ seien wie üblich in dieser Reihenfolge mit a, b, c, d bezeichnet. Ein zweites dem Kreis k einbeschriebenes Viereck A'B'C'D' habe ebenfalls a, b, c, d als Längen seiner Seiten, und zwar in einer beliebigen Reihenfolge (die sich also auch von der Reihenfolge $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'A'}$ unterscheiden kann).
Beweisen Sie, dass es möglich ist, zwei Vierecke ABCD und A'B'C'D' so zu bilden, dass alle diese Voraussetzungen erfüllt werden und dass die beiden Vierecke nicht zueinander kongruent sind.

b) Beweisen Sie, dass je zwei Vierecke, die die in a) genannten Voraussetzungen erfüllen, zueinander flächengleich sind.

17) [410941 – 38%]
Beweisen Sie, dass für jede dreiseitige Pyramide ABCD gilt:
Sind die Dreiecke ABD, ACD und BCD sämtlich bei D rechtwinklig, so ist die Summe der Quadrate ihrer Flächeninhalte gleich dem Quadrat des Flächeninhalts des Dreiecks ABC. („Räumliche Version des Satzes von Pythagoras“)

18) [450943 – 30%]
Im einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei H der Fußpunkt des von C auf $\overline{AB}$ gefällten Lotes. Ferner seien P und Q die Fußpunkte der von H auf $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ gefällten Lote. Es gelte außerdem: Die Umkreise der Dreiecke AHP und HBQ schneiden die Strecke $\overline{PQ}$ in von P und Q verschiedenen Punkten S bzw. T (siehe Abbildung).
Man beweise, dass der Umkreis des Dreiecks HTS die Gerade AB berührt.



19) [450946 – 29%]
In der Zeichenebene sei eine Folge A_1, A_2, A_3, A_4, . . . von Punkten derart gegeben, dass gilt:

- Für alle positiven ganzen Zahlen i hat das Dreieck $D_i = A_iA_{i+1}A_{i+2}$ einen rechten Winkel bei A_{i+2}.
– Der Punkt A_{i+3} liegt im Inneren der Strecke $\overline{A_iA_{i+1}}$.

Wie kann man in endlich vielen Konstruktionsschritten aus den Punkten A_1, A_2 und A_3 alle Punkte konstruieren, die im Inneren jedes der Dreiecke D_i (i = 1, 2, . . .) liegen?

20) [460942 – 28%]
Ermitteln Sie alle konvexen Vierecke, welche die folgende Eigenschaft besitzen:
Auf jeder der vier Seiten des Vierecks existiert ein Punkt (ggf. einer der Endpunkte dieser Seite), der zusammen mit den beiden Endpunkten der gegenüberliegenden Seite ein gleichseitiges Dreieck bildet

Hinweis: Ein Viereck ABCD heißt konvex, falls die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ im Inneren des Vierecks ABCD liegen.

21) [420946 – 25%]
ABC sei ein Dreieck und D der Schnittpunkt der Innenwinkelhalbierenden durch A mit der Seite $\overline{BC}$. Ferner seien folgende Bezeichnungen gewählt:

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|AD| = w$, $|BD| = v$, $|CD| = u$.

Beweisen Sie, dass dann $w^2 = (b + u) \cdot (c - v)$ gilt.