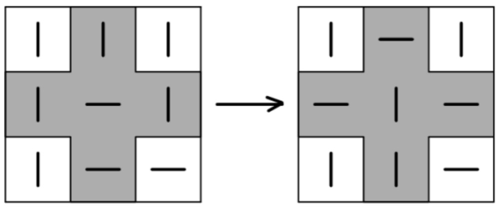
Trainingsaufgaben für die Mathematik-Olympiade
zur Vorbereitung auf die 4. Stufe der Mathematik-Olympiade, Olympiadeklasse 9 - Teil 2

L o g i k / K o m b i n a t o r i k

5) [500941 - 57%]
Wie viele verschiedene achtbuchstabige Wörter (auch sinnlose oder unaussprechliche Wörter sind erlaubt) kann man aus drei Buchstaben A, drei Buchstaben B und zwei Buchstaben C bilden, bei denen gleiche Buchstaben nie nebeneinander stehen?

6) [430942 - 42%]
Beweisen Sie: Aus jeder Menge M von 1003 positiven ganzen Zahlen, die alle kleiner als 2004 sind, können stets zwei Zahlen ausgewählt werden, deren Summe in M liegt.

7) [440946 - 38%]
Ein Schloss hat 9 Hebel, die in einem 3 x 3 - Feld angeordnet sind. Jeder Hebel steht entweder waagerecht oder senkrecht. Um das Schloss zu öffnen müssen alle Hebel senkrecht stehen. Wechselt ein Hebel seine Stellung, so wechseln alle Hebel in derselben Zeile und alle Hebel in derselben Spalte ihre Stellung (siehe Abbildung). Die Positionen, die alle neun Hebel zum gleichen Zeitpunkt einnehmen, nennen wir eine Einstellung des Schlosses.



a) Beweisen Sie, dass es nicht möglich ist, das Schloss aus jeder Einstellung heraus zu öffnen.

b) Beweisen Sie, dass es unter den 512 möglichen Einstellungen genau 32 gibt, aus denen sich das Schloss öffnen lässt.

8) [520945 - 33%]
In einem Zahlenquiz bekommt jeder der 1500 Teilnehmer einen Zettel, auf den er eine oder mehrere verschiedene natürliche Zahlen schreibt und den er dann vorzeigt. Der Quizmaster hat die Aufgabe, auf einen eigenen großen Zettel derart einige natürliche Zahlen zu schreiben, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

(1) Auf dem Zettel jedes Teilnehmers steht eine Zahl, die auch auf dem Zettel des Quizmasters zu finden ist.

(2) Es gibt mindestens einen Teilnehmer, dessen kleinste aufgeschriebene Zahl zugleich die kleinste Zahl auf dem Zettel des Quizmasters ist, und diese Zahl ist die einzige Zahl, die auf beiden Zetteln steht.

Beweisen Sie, dass der Quizmaster dies immer erreichen kann.

Z a h l e n t h e o r i e

9) [440944 - 66%]
Beweisen Sie, dass es keine Paare (x; y) von ganzen Zahlen gibt, welche die Gleichung

$$5x^2 - 11y^2 = 21$$

erfüllen.

10) [420944 – 62%]
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel ganzer Zahlen (a; b; c), für die die Gleichung

$$2a^2 + b^2 = 5c^2 \qquad (1)$$

gilt.

11) [520944 – 61%]
Beweisen Sie, dass 3m +3n +1 für positive ganze Zahlen m, n niemals das Quadrat einer ganzen Zahl sein kann.

12) [480946 – 58%]
Gegeben ist eine natürliche Zahl k mit $k > 0$.
Für eine natürliche Zahl n mit $n > 1$ wird die Summe $S = S_k(n)$ von n + 1 unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen berechnet, deren kleinste gleich k ist. Diese Summe wird auf Teilbarkeit durch n untersucht.

a) Zunächst wird k = 2009 gewählt. Für wie viele Zahlen n ist $S_{2009}(n)$ durch n teilbar?

b) Das Problem ist im Allgemeinen für natürliche Zahlen k und n mit $k > 0$ und $n > 1$ zu lösen: Für welche Zahlen n ist bei gegebener Zahl k die Summe $S_k(n)$ durch n teilbar?

c) Für welche k gibt es genau eine natürliche Zahl n, so dass die Summe $S_k(n)$ durch n teilbar ist?

13) [410943 – 56%]
Ermitteln Sie den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Form $n^4 - 4n^2$ mit $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, welche auf null enden.

14) [470946 – 55%]
In der Gleichung

$$n \cdot (\text{ZAHL}) = \text{SUMME} \qquad (1)$$

sollen für n eine natürliche Zahl und für die Großbuchstaben Ziffern eingesetzt werden, und zwar für gleiche Großbuchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Großbuchstaben verschiedene Ziffern, so dass sich als ZAHL eine vierstellige Zahl und als SUMME eine fünfstellige Zahl im dekadischen Positionssystem ergeben. Eine solche Einsetzung heißt eine „Lösung“, wenn dabei die Gleichung (1) erfüllt wird.

a) Ermitteln Sie eine Lösung.

b) Ermitteln Sie von allen Lösungen diejenige, für die die Zahl SUMME so klein wie möglich ist.

Hinweis: Eine Zahl aus n Ziffern heißt genau dann n-stellig, wenn ihre erste Ziffer von null verschieden ist.

15) [460944 – 48%]
Es sei $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_k$ ein Produkt von Primzahlen mit $p_1 < p_2 < ... < p_k$ und $k > 1$.
Beweisen Sie, dass $p_1 + p_2 + ... + p_k \le \frac{5}{6} n$ gilt.

16) [470946 – 47%]
Man ermittle den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen der Form $a^3 b - a b^3$, wobei a und b ganze Zahlen sind derart, dass $a^2 + b^2$ eine Quadratzahl ist.

A r i t h m e t i k

3) [400942 – 60%]
Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (x; y) reeller Zahlen x, y, von denen das System der beiden Ungleichungen

$$x^2 \le \frac{2000y^2 + 2x - 1}{2001}, \quad y^2 \le \frac{2000x^2 - 2y - 1}{2001}$$

erfüllt wird.

4) [460946 – 44%]
Man ermittle alle Paare (x; y) reeller Zahlen, für welche die Zahlen

$$x + y,\ x \cdot y \quad \text{und} \quad x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$$

Primzahlen sind.

G e o m e t r i e

9) [520942 – 54%]
Gegeben ist ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge 1 und eine Senkrechte g zur Geraden AC durch A. Auf der Geraden g wird ein Punkt P gewählt und der Strahl h senkrecht zu g durch P so gezeichnet, dass er in der gleichen Halbebene wie C bezüglich g liegt. Auf h wird der Punkt Q so bestimmt, dass die Strecken $\overline{CP}$ und $\overline{PQ}$ gleich lang sind. Die Lotfußpunkte von Q auf die Geraden AB und AD werden mit R bzw. S bezeichnet.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Rechtecks mit den Eckpunkten A, R, Q, S in Abhängigkeit von der Länge der Strecke $\overline{AP}$.

10) [410946 – 53%]
Es sei P innerer Punkt einer Strecke $\overline{AB}$. AO_1P und BO_2P seien zwei gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen $\overline{AP}$ bzw. $\overline{BP}$, die beide auf derselben Seite der Geraden AB liegen.
Ermitteln Sie die Menge aller Mittelpunkte der Strecken $\overline{O_1O_2}$, wenn P die inneren Punkte der Strecke $\overline{AB}$ durchläuft.

11) [420942 – 51%]
a) Beweisen Sie, dass ein Sehnenviereck ABCD eindeutig konstruierbar ist, wenn von ihm die Seite $\overline{AB}$ mit der Länge a sowie die Größe σ des Winkels BAC, die Größe τ des Winkels CBD und die Größe ϕ des Winkels DCA gegeben sind.

b) Welche Bedingungen (als Forderung gestellt an alle oder einige der Größen a, σ, τ, ϕ) sind notwendig und hinreichend dafür, dass ein derartiges Sehnenviereck existiert?

12) [400946 – 47%]
Im Inneren eines Quadrates der Seitenlänge 12 cm seien 20 Punkte beliebig, aber so gewählt, dass keine drei auf derselben Geraden liegen.
Beweisen Sie, dass es mindestens ein Dreieck gibt, dessen Ecken mit solchen Punkten übereinstimmen und dessen Flächeninhalt höchstens 8 cm² beträgt.

13) [460945 – 46%]
Im Inneren der Seiten $\overline{B_1A}$ und $\overline{B_2A}$ des Rechtecks AB_1BB_2 mögen die Punkte C_1 bzw. C_2 liegen. Weiterhin sei der Punkt C so gewählt, dass auch AC_1CC_2 ein Rechteck bildet.
Man ermittle den Flächeninhalt F des – möglicherweise zu einer Strecke entarteten – Dreiecks ABC nur aus den Flächeninhalten F_1 und F_2 der Vierecke BCC_1B_1 und CBB_2C_2.

14) [440945 – 39%]
Im Rechteck ABCD sei M ein innerer Punkt derart, dass |< AMB| + |< CMD| = 180° gilt.
Wie groß ist dann die Summe |< MBA| + |< MDC|?

15) [470945 – 34%]
Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit dem Umkreismittelpunkt O.
Die Umkreismittelpunkte der Dreiecke AOC und BCO werden mit Q bzw. R bezeichnet.
Beweisen Sie, dass die Umkreise der Dreiecke ABO und QOR einander berühren.