Trainingsaufgaben für die Mathematik-Olympiade
zur Vorbereitung auf die 4. Stufe der Mathematik-Olympiade, Olympiadeklasse 9 - Teil 1

L o g i k / K o m b i n a t o r i k

1) [510944 - 77%]
Anita und Bodo finden eine alte Balkenwaage mit 2 Waagschalen und einen Wägesatz mit den Massestücken 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, 5 g und 6 g. Da sie Langeweile haben, denken sie sich verschiedene Wettbewerbe aus. Folgende grundlegende Spielregeln werden vereinbart:

(1) Anita und Bodo legen abwechselnd je ein Massestück auf irgendeine der beiden Waagschalen.
(2) Anita beginnt und muss als erstes das 1-g-Massestück auflegen.

Es gibt 3 Spielrunden:

a) Im ersten Spiel wird nach dem Auflegen aller 6 Massestücke die Differenz aus den Massen der linken und der rechten Waagschale gebildet. Ist diese Differenz (in g) ungerade, gewinnt Anita. Ist die Differenz gerade, gewinnt Bodo.
Untersuchen Sie, welcher der Spielpartner einen Gewinn sicher erzwingen kann.

b) Im zweiten Spiel gewinnt Anita, wenn sie es schafft, dass am Ende des Spieles die Summe der Massen auf der linken Waagschale eine durch 3 teilbare Anzahl von Gramm ergibt. Gelingt dies nicht, gewinnt Bodo.
Untersuchen Sie, welcher der Spielpartner einen Gewinn sicher erzwingen kann.

c) Im dritten Spiel gewinnt Anita, wenn irgendwann nach einem von ihren oder Bodos Spielzügen entweder beide Waagschalen im Gleichgewicht sind oder eine der Waagschalen die doppelte Masse der anderen enthält. Anderenfalls gewinnt Bodo.
Untersuchen Sie auch hier, ob (und wenn ja, von wem) in diesem Spiel ein sicherer Sieg erzwungen werden kann.

2) [400945 - 75%]
Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahl 2000 als Produkt von drei natürlichen Zahlen zu schreiben?
Dabei sollen auch Produktdarstellungen, die sich nur in der Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, als voneinander verschieden gelten.

3) [480941 - 63%]
Anton und Bärbel spielen folgendes Spiel: Von einem Stapel mit 100 Karten ziehen sie abwechselnd entweder 2, 5 oder 6 Karten. Den ersten Zug führt stets Anton aus. Gewonnen hat, wer den letzten erlaubten Zug machen kann.
Untersuchen Sie, wer von beiden den Sieg erzwingen kann, und geben Sie eine Gewinnstrategie an.

4) [490941 - 61%]
Die Klasse 10 b plant einen zweitägigen Ausflug zur DRK-Hütte in Altenfeld. In der Klasse 10 b sind 13 Schüler (8 Jungen und 5 Mädchen). Es gibt keine Geschwisterkinder in dieser Klasse. Um die Kosten zu minimieren, haben sich fünf Väter bereit erklärt, die Schüler mit

ihren Autos zur DRK-Hütte zu fahren. Die Mathematiklehrerin Frau Lustig notiert sich auf dem Elternabend die Namen der fünf Väter.
Frau Lustig stellt ihrer Klasse folgende Knobelaufgabe: Wie viele Möglichkeiten der Verteilung der Schüler auf die fünf Fahrzeuge gibt es, wenn man davon ausgeht, dass in jedem Auto genau drei Plätze für Schüler zur Verfügung stehen und in jedem Auto das Kind des Vaters sitzt, der das Auto fährt?

Z a h l e n t h e o r i e

1) [410944 - 81%]

a) Berechnen Sie den Wert der Summe $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots \cdot + (-1)^n \cdot n$ in Abhängigkeit von n, wobei n eine natürliche Zahl mit n > 0 ist.

b) Ermitteln Sie $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{2000} + S_{2001} + S_{2002}$.

2) [420941 - 78%]
Beweisen Sie: Für jedes Paar (m; n) natürlicher Zahlen mit m > 1 und n > 1 ist die Zahl $m \cdot n$ als Summe von m aufeinander folgenden ungeraden Zahlen darstellbar.
Beispiele: 32 = 1 + 3 + 5, 63 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41.

3) [500944 - 77%]
Ermitteln Sie sämtliche Paare (n; t) ganzer Zahlen, für die $n^2 = 2^t + 5$ gilt.

4) [430945 - 75%]
Untersuchen Sie, ob es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, für die $2^n - 3$ und $3^n - 2$ einen gemeinsamen Teiler größer 1 haben.

5) [450942 - 74%]
Man ermittle alle Paare (p; q) von Primzahlen, für die es positive ganze Zahlen x und y gibt, so dass

$$p = x^2 - y$$
$$q = y^2 + 3x - 7$$

gilt.

6) [520941 - 72%]
Schreibt man die Ziffern einer natürlichen Zahl z in umgekehrter Reihenfolge auf, erhält man die Zahl u. Beispielsweise folgt aus z = 31 entsprechend u = 13.

a) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen z, die größer als das entsprechende u sind und für die $z^2 - u^2$ eine Quadratzahl ergibt.

b) Fügt man in die Ziffernddarstellung einer zweistelligen Zahl [ab] in der Mitte eine Null ein, erhält man eine dreistellige Zahl z = [a0b] und entsprechend ihre Umkehrzahl u = [b0a].
Ermitteln Sie die Anzahl der Zahlen z dieser Art, die größer als das entsprechende u sind und für die $z^2 - u^2$ eine Quadratzahl ist.

7) [480945 - 72%]
Die Zifferndarstellung der positiven ganzen Zahl z im Zehnersystem sei $z = [z_{n-1}z_{n-2} \dots z_0]$ mit den Ziffern $z_{n-1}, \dots, z_1, z_0$. Für jede solche Zahl z wird ein Wert S(z) durch Addition der siebenten Potenzen dieser Ziffern, also nach der folgenden Vorschrift berechnet:
$S(z) = S([z_{n-1}z_{n-2} \dots z_0]) = z_{n-1}^7 + z_{n-2}^7 + \dots + z_0^7$.
Es gibt Zahlen z, für welche S(z) = z gilt, zum Beispiel z = 1 741 725, denn es gilt
$1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7 = 1\,741\,725$.
Untersuchen Sie, ob es endlich oder ob es unendlich viele positive ganze Zahlen z mit S(z) = z gibt.

8) [410945 - 66%]
Beweisen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$.

A r i t h m e t i k

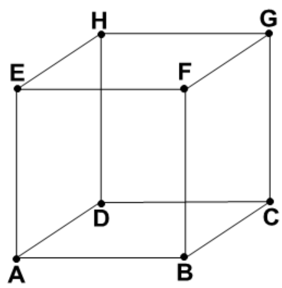
1) [440541 - 74%]
Gegeben sei die Gleichung $4y^2 + 4xy + x + 6 = 0$.
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die es reelle Zahlen y gibt, so dass diese Gleichung erfüllt ist.

2) [450945 - 63%]
Ermitteln Sie alle reellen Tripel (x; y; z), welche Lösungen des folgenden Gleichungssystems sind:

$$x + y + \frac{1}{z} = 3$$
$$y + z + \frac{1}{x} = 3$$
$$z + x + \frac{1}{y} = 3.$$

G e o m e t r i e

1) [500942 - 71%]
Gegeben ist ein Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge a und den Bezeichnungen wie in der Abbildung. Auf der Geraden AG sei P derjenige Punkt, für den EP senkrecht zu AG ist.
Man beweise, dass P von den Punkten F, H und C den Abstand a hat.



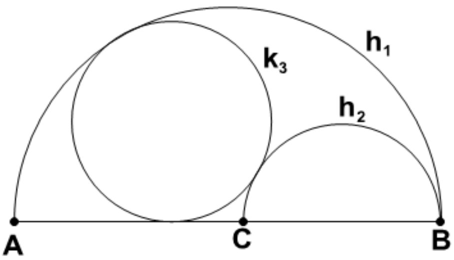
2) [430944 - 71%]
In einer Ebene liegen 10 Kreise $K_1, K_2, \dots, K_{10}$ mit den Radien $r_1, r_2, \dots, r_{10}$ so, dass je zwei Kreisflächen keine inneren Punkte gemeinsam haben. In der gleichen Ebene liege ein weiterer Kreis K_0 mit dem Radius r_0, für den

$$r_0^2 = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{10}^2$$

gilt.
Beweisen Sie, dass für 11 Kreise dieser Art stets gilt: Die Summe der Inhalte der Flächen, die außerhalb von K_0, aber innerhalb von $K_1, K_2 \dots$ oder K_{10} liegen, ist gleich dem Inhalt der Fläche, die außerhalb von $K_1, K_2, \dots$ und K_{10}, aber innerhalb von K_0 liegt.

3) [430946 - 70%]
In einem Dreieck ABC wird der Innenwinkel ACB von der Seitenhalbierenden CM und der Höhe CD in drei gleich große Teile geteilt.
Ermitteln Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC.

4) [480944 - 69%]
Es sei C ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$. Über $\overline{AB}$ und $\overline{CB}$ seien die Halbkreise h_1 bzw. h_2 zur selben Seite hin errichtet. Der Kreis k_3 berühre h_1 von innen, h_2 von außen und weiterhin die Strecke $\overline{AB}$.
Wenn die Radien von h_2 und k_3 beide 3 cm groß sind, wie groß ist dann der Radius von h_1?



5) [490943 - 68%]
Es sei ABCD ein konvexes Viereck. Die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{DA}$ bezeichnen wir mit M bzw. N.
Beweisen Sie:

a) Wenn ABCD ein Parallelogramm ist, dann sind DM || BN und NC || AM.

b) Wenn DM ||BN und NC || AM sind, dann ist ABCD ein Parallelogramm.

6) [490945 - 58%]
Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit |BC| > |CA|. Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$ schneide die Gerade BC in P und die Gerade CA in Q. Der Fußpunkt des von P auf die Gerade CA gefällten Lotes wird mit R, der Fußpunkt des von Q auf die Gerade BC gefällten Lotes wird mit S bezeichnet.
Beweisen Sie, dass die Punkte R, S und der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ auf einer Geraden liegen.

7) [480942 - 57%]
Es sei ABCD ein beliebiges, nicht notwendig regelmäßiges Tetraeder mit Volumen 1. Es bezeichnen S_A, S_B, S_C und S_D in dieser Reihenfolge die Schwerpunkte seiner dreieckigen Seitenflächen BCD, ACD, ABD bzw. ABC.
Welche Werte kann das Volumen des Tetraeders $S_AS_BS_CS_D$ annehmen?

8) [500945 - 55%]
Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Der Fußpunkt der Höhe on C auf AB sei D. Weiter seien X und Y die Inkreismittelpunkte der Dreiecke ADC und CD.
Berechnen Sie die Größen der Innenwinkel des Dreiecks CXY unter Verwendung der Winkelgrößen des Dreiecks ABC.

Dieser Teil 1 enthält leichte Aufgaben aus der 4. Stufe der Mathematik-Olympiade in der Olympiadeklasse 9. Er kann nach der 3. Stufe der MO für Klasse 8 an Schüler ausgegeben werden, die sich auf die 3. Stufe der MO in Klasse 9 vorbereiten wollen. Neben der Nummer der Aufgabe ist der erreichte Punktdurchschnitt angegeben.

Der Teil 2 dieser Aufgabensammlung enthält mittelschwere Aufgaben aus der 4. Stufe der MO und kann zu Beginn des Schuljahrs oder nach der 2. Stufe der MO in Klasse 9 an interessierte Schüle ausgegeben werden.
Der Teil 3 enthält schwere Aufgaben und kann nach der 3. Stufe der MO ausgegeben werden.