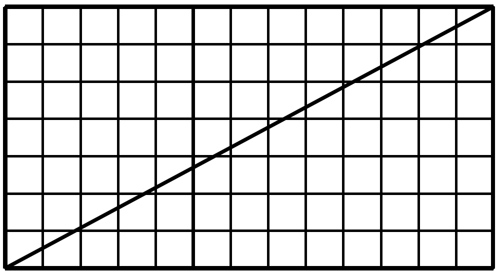
K O R R E S P O N D E N Z Z I R K E L   M A T H E M A T I K

Regierungsbezirk Chemnitz

A u f g a b e n   Klasse 6   2021/22   Serie 6

1) Eine Rechteckfläche sei vollständig aus Einheitsquadraten (Quadraten mit einer Länge und Breite von einer Einheit) zusammengesetzt. Solch ein Rechteck hat eine Länge von a und eine Breite von b Einheiten, besteht also aus $a \cdot b$ Einheitsquadraten.
Eine Diagonale dieses Rechtecks zerlegt einige dieser Einheitsquadrate. Ein Einheitsquadrat wird genau dann zerlegt, wenn innere Punkte (und nicht nur ein Eckpunkt) dieses Quadrats auf der Diagonalen liegen.
Mit $z(a; b)$ bezeichnen wir die Anzahl der zerlegten Einheitsquadrate eines Rechtecks mit der Länge a und der Breite b.



a) Die nebenstehende Abbildung zeigt ein solches Rechteck für $a = 13$ und $b = 7$.
Ermittle die Anzahl $z(13; 7)$ der zerlegten Einheitsquadrate durch Abzählen.
(2 P.)

b) Ermittle die Anzahlen $z(5; 1)$, $z(5; 2)$, $z(5; 3)$, $z(5; 4)$ und die Anzahlen $z(4; 3)$, $z(5; 3)$, $z(6, 3)$, $z(7; 3)$.
(2 P.)

c) Äußere eine Vermutung, wie man allgemein $z(a; b)$ für beliebige a und b berechnen kann, wenn a und b teilerfremde Zahlen sind.
Überprüfe diese Vermutung für das in Teil a) ermittelte $z(13; 7)$. (2 P.)

2) Denke dir eine Zahl, multipliziere sie mit 10 , zähle 35 hinzu, dividiere das Resultat durch 5, addiere 13 und subtrahiere schließlich das Doppelte der gedachten Zahl. Du wirst in jedem Fall das gleiche Resultat erhalten. Wie ist das möglich? Wie lautet dieses Resultat? (4 P.)

3) Ermittle alle natürlichen Zahlen x, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:
(1) Dividiert man 100 durch die Zahl x, dann bleibt der Rest 4.
(2) Dividiert man 90 durch die Zahl x, dann bleibt der Rest 18. (5 P.)
[Wiederhole „Einige logische Grundlagen" auf Seite 4 der Lösungen zur Serie 1]

4) Beweise den folgenden Satz: Die Summe von 10 aufeinander folgenden Zahlen, von denen die kleinste Zahl durch 3 teilbar ist, ist stets durch 15 teilbar. (5 P.)
Stelle den Beweis (wie unten angegeben) in Form eines Beweisschemas dar.

Es gilt der folgende *Satz über die Division natürlicher Zahlen mit Rest*:
Zu jeder Zahl a (als Dividenden) und jeder von 0 verschiedenen Zahl m (als Divisor) gibt es stets genau eine Zahl q (als Quotienten) und eine Zahl r (als Rest), für die folgende Gleichung gilt:

$$a = m \cdot q + r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r \leq m - 1 \ .$$

Das Beweisen von mathematischen Sätzen

Wahre mathematische Aussagen nennt man Lehrsätze oder kurz *Sätze.*
Jeder mathematische Satz enthält *Voraussetzungen* (V_1, V_2, ... , V_n) und eine *Behauptung* (Beh) und lässt sich in der „Wenn-dann-Form" formulieren:

Wenn (V_1 und V_2 und ... und V_n) gilt, *dann* gilt auch (Beh).

Ein *Beweis* ist erbracht, wenn man von den *Voraussetzungen* ausgehend in endlich vielen Schritten über *abgeleitete Feststellungen* zur *Behauptung* gelangt, wobei jeder Beweisschritt durch die Angabe des verwendeten *Beweismittels* (Satz, Formel, Umformungsregel, Definition o.ä.) begründet werden muss.
Satz: Das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist stets gerade.
V_1: x ist gerade ; V_2: y ist ungerade ; Beh.: $x \cdot y$ ist gerade .
Beweis:

Aus	V_1	folgt	(1)	$x = 2 \cdot m$ mit $m \in N$;	[nach Definition].
Aus	V_2	folgt	(2)	$y = 2 \cdot n + 1$ mit $n \in N$;	[nach Definition].
Aus	(1) und (2)	folgt	(3)	$x \cdot y = 2 \cdot m \cdot (2 \cdot n + 1)$;	[Einsetzen].
Aus	(3)	folgt	(4)	$x \cdot y = 2 \cdot (2 \cdot m \cdot n + m)$;	[Distributivgesetz].
Aus	(4)	folgt	(5)	$x \cdot y = 2 \cdot k$ mit $k \in N$;	[Summen und Produkte von natürlichen Zahlen sind stets auch natürliche Zahlen].
Aus	(5)	folgt	(Beh)	$x \cdot y$ ist gerade;	[Definition].

Letzter Einsendetermin: 28.03.2022