

AUFGABENSAMMLUNG FÜR ARBEITSGEMEINSCHAFTEN - Klasse 7

ZAHLENTHEORIE

Beweisaufgaben

1) Sei $a = 4765398$.

Ermittle die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen; trage "W" bzw. "F" in die Leerstellen ein!

$11|a$ (...); $22|a$ (...); $33|a$ (...); $44|a$ (...); $55|a$ (...);
 $66|a$ (...); $88|a$ (...); $99|a$ (...).

2) Beweise, dass die Teilbarkeitsbeziehung transitiv ist, d.h. dass für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ gilt:
Wenn $a|b$ und $b|c$, dann $a|c$.

3) Was lässt sich über die Summe und was lässt sich über das Produkt zweier gerader, zweier ungerader bzw. einer geraden und einer ungeraden Zahl aussagen?
Beweise deine Vermutungen!

4) Die Summe von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 3 teilbar.

Die Summe von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist dagegen nie durch 4 teilbar.

Beweise diese Aussagen und bestimme weitere Anzahlen n , für die die Summe von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch n teilbar ist.

5) a) Beweise: Wenn vier beliebige natürliche Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, dann ist ihr Produkt eine gerade Zahl.

b) Untersuche, ob für eine jede gerade Anzahl natürlicher Zahlen der folgende Satz gilt:

Wenn diese Zahlen eine ungerade Zahl als Summe haben, dann ist ihr Produkt eine gerade Zahl.

6) Seien a, b, c, d vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.

Was lässt sich dann über die Differenz $(bc - ad)$ aussagen?

Beweise deine Vermutung!

7) Beweise: Vermehrt man das Produkt von drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen um die mittlere Zahl, dann erhält man stets die 3. Potenz der mittleren Zahl.

8) Beweise: Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, lässt bei Division durch 9 stets den Rest 2.

9) Beweise: Unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es stets genau eine Zahl, die durch n teilbar ist.

10) Durch welche (möglichst große) Zahl ist das Produkt von fünf aufeinanderfolgenden Zahlen stets teilbar, wenn die erste dieser Zahlen eine (positive) gerade Zahl ist?

Beweise deine Vermutung!

11) Unter einem Primzahldrilling versteht man drei Primzahlen, die sich in der Form p , $p+2$, $p+4$ darstellen lassen.

Beweise, dass es nur einen Primzahldrilling gibt!

Wie lautet dieser Primzahldrilling?

12) Beweise, dass sich jede Primzahl, die größer als 3 ist, stets in der Form $(6n + 1)$ oder in der Form $(6n - 1)$ darstellen lässt!

13) Beweise, dass für alle natürlichen Zahlen gilt:

a) Wenn $z = n^3 - n$, dann $6|z$.

b) Wenn $z = n^3 + 11n$, dann $6|z$.

14) Sei p eine Primzahl und $p > 3$.

Was lässt sich dann über $p^2 - 1$ aussagen?

Beweise deine Vermutung!

Besitzt der bewiesene Satz eine wahre Umkehrung?

Lässt sich dieser Satz verallgemeinern, indem man seine Voraussetzungen abschwächt?

Besitzt eine derartige Verallgemeinerung eine wahre Umkehrung?

Bestimmungsaufgaben

1) Fülle die durch Punkte angedeuteten Leerstellen so mit Ziffern aus, dass jeweils wahre Aussagen entstehen!

Gib dabei stets alle Lösungen an!

$9|572 . 46$; $9|52 . 47$; $11|728 . 53$; $99|62 . . 427$.

2) Ermittle diejenigen 12 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, die die Eigenschaft haben, dass die Summe der beiden größten dieser Zahlen gleich der Summe der 10 übrigen Zahlen ist!

3) Sei s die Summe von 6 natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft:

Die erste Zahl n sei beliebig gewählt; jede weitere Zahl ist genau um 7 größer als das Doppelte der jeweils vorausgehenden Zahl.

Ermittle die größte Zahl, durch die eine solche Summe s stets teilbar ist!

4) Ermittle alle Paare $(p; q)$ von Primzahlen, für die eine natürliche Zahl n existiert, so dass jeweils die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt sind:

a) (1) $q - p > 20$; (2) $p + q = n^2$; (3) $p + q + n = 42$, $n \in \mathbb{N}$.

b) (1) $q - p > 540$; (2) $p + q = n^2$; (3) $p + q + n = 600$, $n \in \mathbb{N}$.

5) Bestimme die Menge aller (im Dezimalsystem geschriebenen) natürlichen Zahlen, die durch 8 teilbar sind, deren Quersumme 7 und deren Querprodukt 6 beträgt. (Dabei versteht man unter dem Querprodukt einer Zahl das Produkt ihrer Ziffern.)

6) Ermittle alle natürlichen Zahlen n , die folgende beiden Bedingungen erfüllen:

- (a) $(n - 9)$ ist eine Primzahl ;
- (b) $(n^2 - 1)$ ist durch 10 teilbar .

7) Ermittle alle Paare $(x; y)$ aus natürlichen Zahlen, die folgende drei Bedingungen erfüllen:

- (a) $x < y$;
- (b) $x + y = 192$;
- (c) $\text{ggT}(x;y) = 24$.

8) Ermittle alle natürlichen Zahlen, die folgende beiden Bedingungen erfüllen:

- (a) Die Zahl ist dreistellig und enthält drei verschiedene Ziffern, die sämtlich Primzahlen sind .
- (b) Die Zahl ist durch jede der von ihren Ziffern bezeichneten Zahlen teilbar.

9) Es sind alle natürlichen Zahlen zu ermitteln, die folgende drei Bedingungen erfüllen:

- (a) Die Zahl ist sechsstellig .
- (b) Die aus der ersten und zweiten, bzw. aus der dritten und vierten, bzw. aus der fünften und sechsten Ziffer gebildeten Zahlen verhalten sich wie 1 : 2 : 3
- (c) Die Zahl ist durch 72 teilbar.

10) Unter dem Zeichen $n!$ (gelesen: n Fakultät) versteht man das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen (größer Null).

Durch welche Potenz von 999 ist $1000!$ teilbar?

11) Ermittle den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen $z = p^4 - 1$, wobei p eine Primzahl ist und $p > 5$ gelten soll!

12) Es gibt natürliche Zahlen, für die die Summe aller Teiler gerade ist, und es gibt auch natürliche Zahlen mit ungerader Teilersumme.

Beispiele:	Zahl	Teiler	Teilersumme
	18	1, 2, 3, 6, 9, 18	39
	54	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54	120

Beschreibe möglichst viele natürliche Zahlen mit gerader bzw. mit ungerader Teilersumme!

Begründe jeweils, warum die Teilersumme gerade bzw. ungerade ist!

13) a) Welche der Zahlen 11, 101, 1001, 10001, 100001, 1000001 sind Primzahlen?

b) Weise nach, dass 10000000001 keine Primzahl ist!

c) Weise nach, dass 1000.....0001 mit 1989 Nullen keine Primzahl ist!

G E O M E T R I E

Beweis Aufgaben

1) Beweise folgenden Satz:

Halbiert man die beiden der Seite \overline{BC} anliegenden Außenwinkel eines Dreiecks ABC und fällt vom Schnittpunkt M dieser Winkelhalbierenden auf die Seiten dieses Dreiecks oder deren Verlängerungen die Lote \overline{MD} , \overline{ME} und \overline{MF} , dann gilt stets $\overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MF}$.

(Folgerung: M ist der Mittelpunkt des zugehörigen Ankreises von Dreieck ABC .)

2) Konstruiere den Schnittpunkt M der Winkelhalbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks ABC !

Konstruiere die Schnittpunkte M_1, M_2, M_3 der Winkelhalbierenden der Außenwinkel dieses Dreiecks!

Welche Vermutungen kann man dieser Figur entnehmen?

Beweise diese Vermutungen!

3) Beweise folgenden Satz:

Eine Gerade g , die durch den Eckpunkt C eines Dreiecks ABC geht und dessen Seite \overline{AB} schneidet, ist eine Seitenhalbierende dieses Dreiecks genau dann, wenn der Abstand von A zu g gleich dem Abstand von B zu g ist.

4) Auf den Seiten \overline{BC} , \overline{CA} bzw. \overline{AB} eines gleichseitigen Dreiecks ABC möge je ein Punkt A' , B' bzw. C' so liegen, dass die Strecken $\overline{BA'}$, $\overline{CB'}$ und $\overline{AC'}$ gleich lang sind.

Unter diesen Voraussetzungen ist dieses Dreieck vermutlich stets

Beweise diese Vermutung!

5) Sei M bzw. N der Mittelpunkt der Seite \overline{AC} bzw. \overline{BC} eines beliebigen Dreiecks ABC .

Vergleiche die Strecken \overline{MN} und \overline{AB} in Hinblick auf gegenseitige Lage und Länge!

Vermutlich gilt unter diesen Voraussetzungen stets und

Suche nach wahren Umkehrungen der beiden vermuteten Sätze!

6) In einem beliebigen Dreieck ABC sei D , E bzw. F der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} , \overline{BC} bzw. \overline{AC} .

Was lässt sich dann über die Abstände $\overline{EE'}$ und $\overline{FF'}$ der Punkte E bzw. F von der Seitenhalbierenden CD aussagen?

Beweise die gefundene Vermutung!

7) Sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden \overline{AE} , \overline{BF} und \overline{CD} eines beliebigen Dreiecks ABC .

a) Beweise, dass die 6 Teildreiecke ADS , BDS , BES , CES , CFS und AFS stets inhaltsgleich sind

b) Leite hieraus ab, dass stets $\overline{AS} : \overline{SE} = \overline{BS} : \overline{SF} = \overline{CS} : \overline{SD} = 2 : 1$ gilt!

8) Sei M , N , P bzw. Q jeweils der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} bzw. \overline{AD} eines beliebigen (konvexen) Vierecks $ABCD$.

Unter diesen Voraussetzungen ist $MNPQ$ vermutlich stets ein

a) Beweise diese Vermutung!

b) Was lässt sich diesbezüglich über spezielle Arten von Vierecken $ABCD$ aussagen?

9) Beweise folgenden Satz:

Fällt man von einem beliebigen Punkt der Basis eines gleichschenkligen spitzwinkligen Dreiecks die Lote auf die Schenkel dieses Dreiecks, dann ist die Summe der Längen dieser Lote gleich der Länge der Höhe, die zu einem Schenkel dieses Dreiecks gehört.

Gilt dieser Satz auch für nichtspitzwinklige gleichschenklige Dreiecke?

10) In einem Parallelogramm $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen \overline{AC} . Die Parallele durch P zu \overline{AB} schneide \overline{BC} in H und \overline{AD} in G ; die Parallele durch P zu \overline{BC} schneide \overline{AB} in E und \overline{CD} in F .

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Parallelogramme $EBHP$ und $GPFD$ stets inhaltsgleich sind!

11) Sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $\angle BAD = \alpha > 90^\circ$ und $\overline{AB} > \overline{BC}$.

Der Kreis um B mit dem Radius \overline{BC} schneide die Gerade DC in E (C);

der Kreis um D mit dem Radius \overline{DC} schneide die Gerade BC in F (C).

Es ist zu beweisen, da hieraus die Behauptung $\overline{AE} = \overline{AF}$ folgt

12) Beweise: In jedem Dreieck ist die Länge einer jeden Seitenhalbierenden stets kleiner als die halbe Länge des Umfangs dieses Dreiecks.

13) Sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit spitzem Innenwinkel bei A und mit $\overline{AB} > \overline{BC}$.

Der Kreis mit dem Radius \overline{DC} schneide die Verlängerung von \overline{CB} über B hinaus in E , der Kreis um B mit dem Radius \overline{BC} schneide die Strecke \overline{CD} in F .

Beweise, dass aus diesen Voraussetzung stets folgt:

a) $\angle ADE = \angle FBA$;

b) Das Dreieck AEF ist gleichschenkl.

14) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} < \overline{BC}$ und $\angle BAC = \alpha < 90^\circ$.

Sei D derjenige Punkt auf der Seite \overline{AC} , für den $\overline{DC} = \overline{AB}$ gilt; sei M bzw. N der Mittelpunkt von \overline{AD} bzw. \overline{BC} ; sei E der Schnittpunkt der Geraden AB und MN .

a) Was lässt sich dann über die Seiten des Dreiecks EAM aussagen?

Beweise die gefundene Vermutung!

b) Drücke die Größe des Winkels $\angle AEM$ durch die Winkelgröße α aus!

(Hinweis: Als Hilfspunkt eignet sich ein günstig gewählter Punkt F auf der Verlängerung von \overline{CA} über A hinaus.)

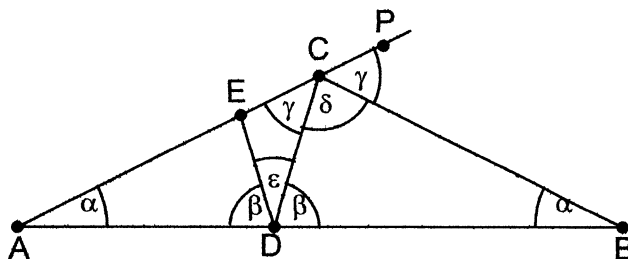
Bestimmungsaufgaben

1) In nebenstehender Figur gelte

- $\angle CBA = \alpha$,
- $\angle BDC = \beta$,
- $\angle BCP = \gamma$,
- $\angle DCB = \delta = 80^\circ$.

a) Berechne die Größe von $\angle CDE$!

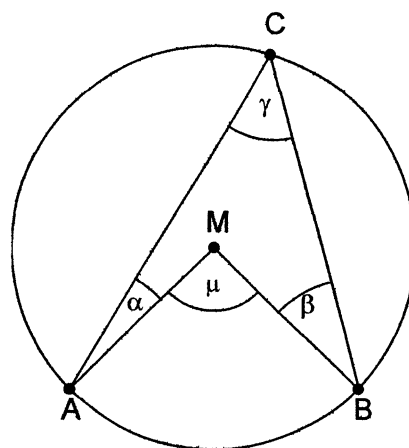
b) Drücke ε allgemein durch δ aus!
Welche Bedingungen muss δ erfüllen?



2) Die Punkte A, B und C seien so auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M gelegen, dass $\angle MAC = \alpha = 25^\circ$ und $\angle AMB = \mu = 110^\circ$ gilt.

a) Berechne die Größe β des Winkels $\angle CBM$ und die Größe γ des Winkels $\angle ACB$!

b) Drücke γ allgemein durch α und μ aus!
Was fällt dabei auf?



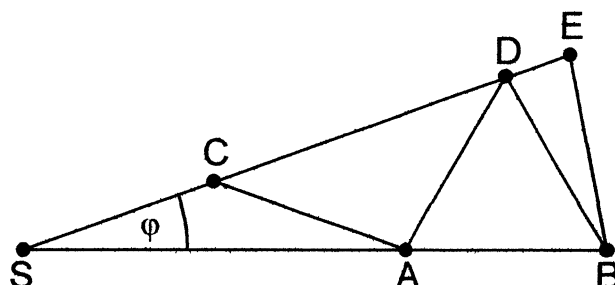
3) In nebenstehender Figur gelte

$$(1) \overline{SC} = \overline{CA} = \overline{AD} = \overline{DB} = \overline{BE},$$

$$(2) \overline{SB} = \overline{SE}.$$

Untersuche, ob sich hieraus die Winkelgröße φ des Winkels $\angle BSE$ eindeutig ermitteln lässt!

Wenn das der Fall ist, dann berechne φ !



4) Sei W der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden $\overline{AW_a}$ und $\overline{BW_b}$ eines Dreiecks ABC, für dessen Innenwinkel $\beta = 2\alpha$ gilt.

a) Wie groß ist der Winkel $\varphi = \angle W_a W W_b$, falls $\alpha = 50^\circ$?

b) Wie groß ist α , wenn $\varphi = 84^\circ$?

c) Wie groß muss α sein, damit $\alpha = \varphi$ gilt?

5) Auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und einem Durchmesser \overline{AB} sei ein Punkt C so gelegen, dass $\angle BAC = \alpha = 36^\circ$ gilt.

a) Berechne die Größe β des Winkels $\angle CBA$!

b) Berechne die Größe γ des Winkels $\angle ACB$!

c) Drücke β allgemein durch α aus!

d) Drücke γ allgemein durch α aus! Was fällt dabei auf?

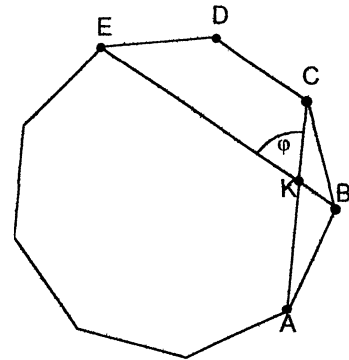
6) Von einem Dreieck ABC und einer Geraden g sei folgendes bekannt:

- (1) $\overline{AB} = \overline{AC} < \overline{BC}$;
- (2) g schneidet die Seite \overline{BC} in F , die Seite \overline{AC} in E und die Verlängerung von \overline{BA} über A hinaus in D ;
- (3) $\overline{CE} = \overline{CF}$;
- (4) $\angle EDA = \delta = 18^\circ$.

Berechne die Größe α des Winkels $\angle BAC$!

7) In nebenstehender Figur ist ein regelmäßiges Neuneck abgebildet.

- a) Berechne die Anzahl aller Diagonalen eines solchen Neunecks!
- b) Berechne die gemeinsame Größe der Innenwinkel eines solchen Neunecks!
- c) Berechne die Größe φ des Winkels $\angle CKE$!



8) Von fünf Punkten A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:

- (a) M ist der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} und die vier Punkte B, C, D, A liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über \overline{AB} ;
- (b) $AB \parallel CD$;
- (c) $\angle BAC = \angle CMD = \alpha$.

Zeige, dass durch diese Voraussetzungen die Größe α des Winkels eindeutig bestimmt ist und ermittle diese Winkelgröße!

9) Im Würfel $ABCDEFGH$ seien P, Q, R Schnittpunkte von Flächendiagonalen.

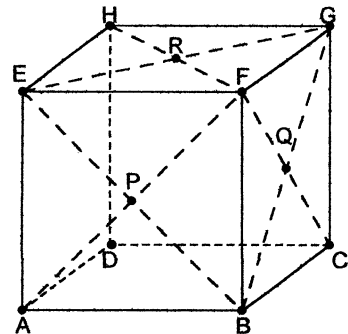
Betrachte folgende neun Winkel:

- $$\angle DBF, \quad \angle DEB, \quad \angle DER, \quad \angle EQG, \quad \angle BEQ,$$
- $$\angle ERA, \quad \angle PQR, \quad \angle RPG, \quad \angle GRC .$$

Welche dieser Winkel sind gleich groß?

Berechne - wenn möglich - die zugehörigen Winkelgrößen!

Begründe die von dir getroffenen Aussagen!



10) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse \overline{AB} und $\angle BAC = 60^\circ$.

Fälle von C das Lot \overline{CD} auf \overline{AB} , danach von D die Lote \overline{DE} und \overline{DF} auf \overline{AC} bzw. \overline{BC} sowie von F das Lot \overline{FH} auf \overline{AB} !

Weise nach, dass $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE}$ gilt!

11) Von sieben Punkten A, B, C, D, E, F, G sei vorausgesetzt:

- (1) Die Punkte A, B, C, D liegen, in dieser Reihenfolge angeordnet, auf einer Geraden g .
- (2) Die Punkte A, E, F, G liegen, in dieser Reihenfolge angeordnet, auf einer anderen Geraden g' .
- (3) Es gilt $\angle GDC = 60^\circ$.
- (4) Es gilt $\overline{AC} = \overline{CG} = 12 \text{ cm}$ und $GC \perp AC$.
- (5) Die fünf Dreiecke ABE, BEF, BCF, CFG, CDG haben den gleichen Flächeninhalt.

Zeige, dass durch diese Voraussetzungen

- die Größe des Winkels $\angle DAG$,
- der Flächeninhalt des Dreiecks ADG ,
- die Streckenlängen \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{AE} , \overline{EF} und \overline{FG} eindeutig bestimmt sind und berechne diese Größen!

Ortsaufgaben

1) Gib jeweils den geometrischen Ort aller Punkte X einer Ebene an, die folgende Bedingungen erfüllen:

- X hat vom Punkt M den Abstand r ($\overline{MX} = r$);
- X hat von den Punkten A und B den gleichen Abstand ($\overline{AX} = \overline{XB}$);
- X hat von der Geraden g den Abstand d ;
- X hat von den parallelen Geraden g_1 und g_2 den gleichen Abstand;
- X hat von den einander schneidenden Geraden g_1 und g_2 den gleichen Abstand.

2) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $J(ABC)$.

Ermittle den geometrischen Ort aller Punkte X , die im Inneren oder auf dem Rand von ABC liegen und die folgende Bedingung erfüllen:

$$J(ABX) = J(ABC).$$

3) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $J(ABC)$.

Ermittle den geometrischen Ort aller Punkte X , die im Inneren oder auf dem Rand von ABC liegen und die folgende Bedingung erfüllen:

$$J(AXC) = J(BXC).$$

4) Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$ mit dem Flächeninhalt $J(ABCD)$.

Ermittle den geometrischen Ort aller Punkte X in der durch $ABCD$ festgelegten Ebene, die folgende Bedingung erfüllen:

$$J(ACX) = J(ABCD).$$

Konstruktionsaufgaben

1) Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$. Zu konstruieren sind alle Punkte X , die folgende Bedingungen erfüllen:

- X hat von den beiden Geraden $g_1 = AB$ und $g_2 = AC$ den gleichen Abstand;
- $\overline{BX} = r \text{ cm}$.

Ermittle die Anzahl dieser Punkte X in Abhängigkeit von r !

2) Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC .

Zu konstruieren sind alle Punkte X im Inneren oder auf dem Rand dieses Dreiecks, die folgende Bedingung erfüllen:

Die Dreiecke ABX , BCX und ACX haben den gleichen Flächeninhalt.

Es sind jeweils alle (untereinander nicht kongruenten) Dreiecke ABC zu konstruieren, die die in Aufgabe 3) bis Aufgabe 6) angegebenen Bedingungen erfüllen.

- 3) (a) $\overline{AC} = b = 5 \text{ cm}$; (b) $\overline{CH} = h_c = 4 \text{ cm}$; (c) $\overline{BS} = s_b = 6 \text{ cm}$;
 (d) \overline{CH} ist Höhe ; (e) \overline{BS} ist Seitenhalbierende .
- 4) (a) $\overline{AS_a} = s_a = 6 \text{ cm}$; (b) $\overline{BS_b} = s_b = 7,5 \text{ cm}$; (c) $\overline{AH} = h_a = 5 \text{ cm}$;
 (d) $\overline{AS_a}$ und $\overline{BS_b}$ sind Seitenhalbierende ; (e) \overline{AH} ist Höhe
- 5) (a) $\overline{AC} - \overline{AB} = d = 3 \text{ cm}$; (b) $\angle BAC = \alpha = 50$; (c) $\angle CBA = \beta = 80^\circ$.
- 6) (a) $\overline{BC} = a$; (b) $\overline{AB} + \overline{AC} = s$; (c) $\angle CBA = \beta$.

7) Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruenten) Vierecke $ABCD$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$;
 (b) $\overline{AC} = e = 7 \text{ cm}$;
 (c) $\overline{BD} = f = 6 \text{ cm}$;
 (d) $\angle BAD = \alpha = 48^\circ$;
 (e) $\angle ASB = \sigma = 114^\circ$ mit $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{S\}$.

8) Gegeben sei ein konvexes Fünfeck $ABCDE$.

Zu konstruieren ist ein Dreieck PQD , das dem gegebenen Fünfeck inhaltsgleich ist und dessen Eckpunkte P und Q auf der Geraden AB liegen.

9) Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruenten) Vierecke $ABCD$ (mit den Innenwinkelgrößen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$), die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) $\overline{AD} = \overline{DC} = c = 4 \text{ cm}$;
 (b) $\beta = 2\alpha$; (c) $\gamma = \frac{3}{2}\beta$; (d) $\delta = \frac{4}{3}$.

a) Weise nach, dass es genau ein Viereck $ABCD$ gibt, das die gegebenen Bedingungen erfüllt, und dass dieses Viereck ein Trapez ist!

b) Beweise, dass die Diagonale \overline{AC} den Winkel $\angle BAD$ halbiert!

10) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = c = 9 \text{ cm}$, $\overline{BC} = a = 7 \text{ cm}$ und $\overline{AC} = b = 5 \text{ cm}$.

Zu konstruieren ist das Rechteck $ABDE$, das mit dem gegebenen Dreieck inhaltsgleich ist (wobei D und E auf derselben Seite von \overline{AB} liegen sollen wie C).

Konstruiere jeweils alle (untereinander nicht kongruenten) Vierecke $ABCD$, die die in den Aufgaben 11) und 12) genannten Bedingungen erfüllen .

- 11) (a) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$;
 (b) $\overline{AB} = a = 8 \text{ cm}$;
 (c) $\overline{BC} = b = 4 \text{ cm}$;
 (d) $\overline{CD} = c = 3 \text{ cm}$;
 (e) $\overline{AD} = d = 5 \text{ cm}$.

- 12) (a) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$;
 (b) $\overline{AB} - \overline{CD} = p = 3 \text{ cm}$;
 (c) $\overline{BC} = b = 4 \text{ cm}$;
 (d) $\overline{AD} = d = 6 \text{ cm}$;
 (e) $\overline{AC} = e = 9 \text{ cm}$.

13) Gegeben ist ein Quadrat. Ein Kreis soll so gezeichnet werden, dass er zwei Nachbarseiten des Quadrats berührt und durch einen Eckpunkt des Quadrats geht.

ARITHMETIK

Aussageformen, Mengen und Abbildungen

1) Entscheide jeweils, ob es sich um eine Aussage (Einzelaussage, Allaussage, Existenzaussage), eine Aussageform oder einen Term handelt; gib den Wahrheitswert der vorkommenden Aussagen an; entscheide, ob die vorkommenden Aussageformen erfüllbar, allgemeingültig oder kontradiktorisch sind!

- a) $x + 3 = 4$, $x \in \mathbb{Q}$
- b) $5 + 3 = 4$
- c) $(x + y)^2$, $x, y \in \mathbb{Q}$
- d) Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- e) $x < y$, $x, y \in \mathbb{Q}$
- f) $m|n$, $m, n \in \mathbb{N}$
- g) $\text{ggT}(14; 35)$
- h) Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, für das gilt: $x = x + 1$
- i) $\text{ggT}(14; 35) = 7$
- j) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- k) $x^2 < 0$, $x \in \mathbb{Q}$
- l) Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, für das gilt: $x^2 < 0$

Gib weitere Beispiele für Aussagen, Aussageformen und Terme an!

- 2) Überführe folgende Aussageformen durch Interpretation der Variablen in wahre Einzelaussagen!
 Bilde weitere Beispiele!

Aussageform $H(x)$, $x \in X$	Interpretation der Variablen	wahre Einzelaussage
a) $\frac{7}{x+2} = \frac{1}{2}$; $x \in \mathbb{Q}$
b) $\frac{x}{2} + 1 < \frac{1}{3}$; $x \in \mathbb{Z}$
c) $x^2 = 64$; $x \in \mathbb{R}$

3) Ermittle zu folgenden Aussageformen die zugehörigen Erfüllungsmengen und suche nach Beziehungen zwischen diesen Mengen!

Aussageform $H(x)$, $x \in X$	Erfüllungsmenge M
a) $x 6$; $x \in \mathbb{N}$
b) $x 4$ und $x 6$; $x \in \mathbb{N}$
c) $x 4$ oder $x 6$; $x \in \mathbb{N}$
d) $x 4$; $x \in \mathbb{N}$
e) $2 x$; $x \in \mathbb{N}$
f) $\overline{AX} = a$; $X \in \{\text{Punkt der Ebene}\}$
g) $\overline{AX} = \overline{XB}$; $X \in \{\text{Punkt der Ebene}\}$
h) x hat vier rechte Winkel; $x \in \{\text{Viereck}\}$
i) x hat vier rechte Winkel und x hat orthogonale Diagonalen; $x \in \{\text{Viereck}\}$
j) $x^2 = 9$; $x \in \mathbb{Q}$
k) $x^2 = 9$; $x \in \mathbb{N}$
l) $2x - 9 < 0$; $x \in \mathbb{N}$
m) $x^2 + 1 = 0$; $x \in \mathbb{Q}$
n) $\frac{1}{2}(x + 4) = 2 + \frac{x}{2}$; $x \in \mathbb{R}$
Aussageform $H(x,y)$; $x \in X, y \in Y$	Erfüllungsmenge M
o) $x y$; $x \in \{2, 3\}, y \in \{6, 9\}$
p) $x + y = 2$; $x, y \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$
q) $x + y < 7$; $x \in \{2, 3\}, y \in \{6, 9\}$
r) $y = x^2$; $x, y \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$

4) Veranschauliche durch Mengendiagramme!

- a) $M_1 = (A \cup B) \cup C$; b) $M_2 = (A \cap B) \cup C$;
- c) $M_3 = (A \cap B) \cap C$; d) $M_4 = A \cap (B \cup C)$.

5) Gegeben seien die Mengen $P = \{3, 6, 9, 12\}$ und $Q = \{8, 9\}$.
 Ermittle das Kreuzprodukt $P \times Q$ dieser Mengen, d.h. die Menge aller geordneten
 Zahlenpaare $[p, q]$ mit $p \in P$ und $q \in Q$.

$P \times Q =$

6) Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{3, 4, 5\}$. Ermittle

$M \cap N =$ $M \cup N =$

$M \times N =$

7) Sei $M = \{a, b, c\}$ und $N = \{1, 2, 3\}$.

Stelle folgende Abbildungen durch Pfeildiagramme dar und fülle die angegebenen
 Leerstellen!

a) $f_1 = \{ [a,1]; [a,2]; [b,2]; [c,1]; [c,2]; [c,3] \}$; $f_1 \cap f_2 =$

b) $f_2 = \{ [a,3]; [b,1]; [c,2] \}$; $f_1 \cap f_3 =$

c) $f_3 = \{ [a,2]; [b,1]; [b,2]; [c,2] \}$; $f_1 \cup f_4 =$ =

d) $f_4 = \{ [a,3]; [b,1]; [b,3]; [c,2] \}$; Beziehung zwischen f_2 und f_4 ?

8) Entscheide, ob die durch folgende Aussageformen festgelegten Abbildungen

$X \xrightarrow{f} Y$ eindeutig sind oder nicht! Begründe!

Aussageform $H(x,y); x \in X, y \in Y$	Abbildung f eindeutig?	Begründung
a) $x y; x,y \in \mathbb{N}$
b) $QS(x) = y; x,y \in \mathbb{N}$
c) $x = QS(y); x,y \in \mathbb{N}$
d) $x + y = 2; x,y \in \mathbb{N}$
e) $x + y < 2; x,y \in \mathbb{N}$
f) $y = x^2; x,y \in \mathbb{R}$
g) $x = y^2; x,y \in \mathbb{R}$

**Das Ermitteln der Erfüllungsmenge von Gleichungen
 oder Ungleichungen**

Bei den folgenden Gleichungen und Ungleichungen gelte stets $x \in \mathbb{R}$, d.h. es ist
 jeweils die Erfüllungsmenge über dem Bereich der reellen Zahlen zu ermitteln.

1) a) $\frac{x}{5} = \frac{126-x}{2}$;

b) $\frac{3x-1}{4} + \frac{5-4x}{6} = \frac{x-3}{2}$

c) $\frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} > \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6}$

d) $\frac{7x+3}{4} + \frac{5x-1}{3} \leq \frac{x+1}{6} + \frac{3-x}{2}$

e) $\frac{3x-1}{231} - \frac{2-x}{42} = \frac{3x+1}{154} - \frac{3-x}{66}$

f) $-\frac{8x-5}{6} = \frac{8-2x}{2} - \frac{x-1}{3}$

$$g) \frac{x+5}{20} + \frac{x+5}{5} - \frac{8x+20}{16} = -\frac{x}{4} \quad h) \frac{2x-3}{143} - \frac{x-5}{187} = \frac{2x+1}{221}$$

$$i) \frac{3x-2}{429} - \frac{2x+1}{234} - \frac{x-4}{286} = \frac{2-x}{198} \quad j) \frac{x+2}{84} - \frac{x-1}{207} = \frac{2x+7}{322}$$

$$k) \frac{1-2x}{1122} + \frac{x+1}{612} - \frac{1-2x}{396} = \frac{x}{204} \quad l) \frac{9x+11}{1274} + \frac{x+2}{819} = \frac{x+1}{104}$$

$$2) a) (5+x)(4x-2) < (2x+1)(2x-1) \quad b) (3-x)(5x-2) \leq (1-5x)(x+7)$$

$$c) (2x-1)^2 - (x+2)(x-2) = (3x+1)(x-3)$$

$$d) (3x+2)(3x-2) - (2x+3)^2 = (5x-1)(x-3)$$

$$e) (5x-7)(5x+7) - (4x-5)^2 = (3x-8)(3x+8)$$

$$3) a) \frac{7x+3}{x^2-1} - \frac{3}{x-1} = \frac{5}{x+1}$$

$$b) \frac{x+6}{10x-15} - \frac{1}{3} = \frac{3}{5} - \frac{3x-7}{4x-6}$$

$$c) \frac{10}{2x-1} - \frac{7}{2x-2} - \frac{3}{x-1} = 0$$

$$d) \frac{x-1}{3x-4} - \frac{4x-7}{6x-8} + \frac{x+2}{12x-16} = \frac{1}{4}$$

$$e) \frac{6x-6}{4x^2-9} - \frac{5}{4x+6} = \frac{2}{6x-9}$$

$$f) \frac{1}{x^2+4x+4} - \frac{2}{3x^2-12} + \frac{3}{9x+18} = \frac{3}{9x-18}$$

$$4) a) ax = b$$

$$b) a + bx = c + dx$$

$$c) ab = c(x-d)$$

$$d) (x-b)^2 - (x-a)^2 = 0$$

$$e) 14ax - 14a + 7b = 8a - 5b + 8ax$$

$$f) a - [12x - (8 - 5x)] = 4b - [15a + (8b - 3x)]$$

$$g) (ax+b)(bx+a) - (ax+b)(bx-a) = a^2 + b^2$$

$$5) a) |x-5| = 1$$

$$b) |x-5| = 0$$

$$c) |x| + 5 = 3$$

$$d) |x+2| = 1$$

$$e) |x-1| + 1 = 0$$

$$f) |x| + 3 = 5$$

$$g) |x+3| = 5$$

$$h) |x-7| = 10$$

$$i) |x+7| = 10$$

$$6) a) \sqrt{x+3} + 7 = 5$$

$$b) \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 3$$

$$c) \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} = 0$$

$$d) \sqrt{1-x} < \sqrt{x-1}$$

$$e) \sqrt{3-x} < 7 + \sqrt{x-5}$$

$$f) \sqrt{x-3} < 7 + \sqrt{5-x}$$

$$g) \sqrt{x^2+4} + x^2 = 2$$

$$h) |x^2+3| - |x^2+1| \leq 2 + \sqrt{x}$$

$$7) a) |x| = \frac{x}{2} + 2$$

$$b) |2x-2| < x+1$$

$$c) x - |x+2| + |3-x| < 1$$

$$d) |4x-3| < 4|6-2x|$$

$$8) \text{ a) } \frac{7x+b}{x^2-a^2} - \frac{b}{x-a} = \frac{b+2}{x+a} \quad [\text{vergleiche mit Aufgabe 3a)!}]$$

$$\text{b) } \frac{10}{ax-b} - \frac{7}{ax-ab} - \frac{3}{x-b} = 0 \quad [\text{vergleiche mit Aufgabe 3c)!}]$$

$$\text{c) } \frac{1}{x^2+2ax+a^2} - \frac{2}{3x^2-3a^2} + \frac{3}{9x+9a} = \frac{3}{9x-9a} \quad [\text{vergleiche mit Aufgabe 3f)!}]$$

Das Beweisen von Gleichheits- und Ungleichheitsaussagen

Es sind folgende Sätze zu beweisen, wobei der Variablengrundbereich stets die Menge der reellen Zahlen sei

1) Wenn $x > 0$, dann $x + \frac{1}{x} \geq 2$. (Wann gilt das Gleichheitszeichen?)

2) Wenn $u, v > 0$, dann $\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \geq 2$. (Wann gilt das Gleichheitszeichen?)

3) Wenn $xy > 0$, dann $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. (Wann gilt das Gleichheitszeichen?)

5) Wenn $xy > 0$, $\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$. (Wann gilt das Gleichheitszeichen?)

6) Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ und $a, b, c, d > 0$, dann $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

7) Es gelte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $c \neq 0, d \neq 0, a \neq b, c \neq d$.

a) Beweise: Wenn $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$, dann $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

b) Beweise oder widerlege die Umkehrung dieses Satzes!

8) Wenn $a, b > 0$, dann $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

9) Wenn $a, b > 0$, dann $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{2}{a+b}$.

10) Wenn $a, b, c > 0$, dann $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} > \frac{3}{a+b+c}$.

11) Wenn $a, b, c > 0$, dann $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} > 1$.

25) a) Es gilt: $\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2}$.

b) Es gilt: $\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2000} > \frac{7}{12}$.

c) Lässt sich die Aussage noch weiter verschärfen?

Sachaufgaben und Anwendungsaufgaben

1) Wähle eine beliebige Zahl x . Addiere 13. Multipliziere das Ergebnis mit 13. Subtrahiere nun 13 und dividiere dann durch 13. Addiere 1. Subtrahiere 13. Was fällt auf? Was passiert, wenn man jede in der Aufgabe vorkommende 13 durch eine beliebige andere (von 0 verschiedene) Zahl a ersetzt?

2) Einem Schwarm Gänse fliegt eine Gans entgegen und spricht: "Guten Tag ihr 100 Gänse!" "Wir sind nicht 100 Gänse" antwortet der Führer des Schwarms. "Wenn wir soviel wären wie jetzt und noch einmal soviel und die Hälfte soviel und ein Viertel soviel und dann noch du Gans dazu, dann wären wir 100 Gänse." Wie viel Gänse hat der Schwarm?

3) Eine Familie besteht aus 7 Personen, nämlich dem Vater, der Mutter, einem Sohn, zwei Töchtern, einem Großvater und einer Großmutter.

Alle zusammen sind 248 Jahre alt. Vater und Sohn sind zusammen 62 Jahre alt. Vor drei Jahren war der Vater 42 Jahre alt. Vor 5 Jahren war der Sohn doppelt so alt wie die ältere Tochter. In einem Jahr wird der Sohn dreimal so alt sein wie die jüngere Tochter. Der Großvater ist doppelt so alt wie seine drei Enkelkinder zusammen. In 4 Jahren wird die Mutter dreimal so alt sein wie die ältere Tochter.

Weise nach, dass sich aus diesen Angaben das Alter eines jeden Familienmitglieds eindeutig ermitteln lässt, und gib an, wie alt jedes Familienmitglied ist!

4) Eine Mutter und ihre 3 Kinder sind zusammen 63 Jahre alt. Die Mutter ist siebenmal so alt wie der jüngere Sohn Roland. Ullrich ist doppelt so alt wie Roland. Vor 3 Jahren war Ingrid fünfmal so alt wie Roland.

Wie alt ist jedes Familienmitglied?

5) Das Ehepaar Winkler hat genau 3 Kinder. Am 01.01.1990 war das älteste Kind doppelt so alt wie das zweite und dieses wiederum doppelt so alt wie das jüngste Kind. Die Mutter war doppelt so alt wie ihre drei Kinder zusammen. Der Vater war so alt wie die Mutter und das jüngste Kind zusammen. Alle 5 Familienmitglieder waren so alt wie der Großvater; dieser war 64 Jahre alt, als das älteste Kind geboren wurde.

Wie alt war jede der genannten Personen am 01.01.1990 ?

6) In einem allseitig geschlossenen, quaderförmigen Glaskasten befinden sich genau 600 cm^3 Wasser. Legt man den Kasten nacheinander mit einer seiner Außenflächen auf eine waagrechte Unterlage, so beträgt die Wasserhöhe im Kasten einmal 2 cm, einmal 3 cm und einmal 4 cm.

Ermittle das Fassungsvermögen des Kastens!

7) Aus 77%-igem und 87%-igem Spiritus soll durch Mischen 1000 g 80%-iger Spiritus hergestellt werden.

Ermittle die dafür benötigten Massen der beiden Spiritussorten; aus denen das Gemisch hergestellt werden soll!

8) Aus 2 kg einer 30%-igen Kochsalzlösung und 3 kg einer 50%-igen Kochsalzlösung wird ein Gemisch hergestellt.

Berechne die Konzentration dieses Gemisches (in %).

9) Wie viel Wasser muss im Gradierwerk aus je 100 kg einer 7%-igen Sole verdunsten, damit die Sole 25%-ig wird?

10) In ein leeres Gefäß (ohne Abfluss) mit einem Fassungsvermögen von 1000 Liter flossen mit gleichmäßiger Strömungsgeschwindigkeit zunächst in jeder Sekunde 30 Liter und von einem späteren Zeitpunkt t an in jeder Sekunde 15 Liter Wasser. Nach genau 40 Sekunden, gemessen vom Anfang an, war das Gefäß gefüllt.

Ermittle, welcher Bruchteil des Gefäßinhalts zum Zeitpunkt t gefüllt war!

11) Ein Mähdrescher mit einer durchschnittlichen Leistung von 3 ha/h und ein zweiter Mähdrescher mit einer durchschnittlichen Leistung von 2 ha/h begannen um 6 Uhr auf einem 32 ha großen Feld mit der Ernte. Der zweite Mähdrescher fiel wegen einer Panne für 1,5 Stunden aus.

Um wie viel Uhr hatten die beiden Mähdrescher das Feld abgeerntet?

12) Ein Wasserbecken, das mit 250 m^3 Wasser gefüllt ist, soll durch zwei Pumpen leergepumpt werden. Die Leistungen der Pumpen betragen 500 l/min und 750 l/min . Um 7.00 Uhr wird mit dem Auspumpen begonnen.

Wann ist das Wasserbecken leergepumpt, wenn die kleine Pumpe zwischendurch eine halbe Stunde ausfällt?

13) Ein Feuerlöschteich enthalte 135 m^3 Wasser. Bei einem Einsatz entnimmt eine Motorspritze 750 l/min .

Wann ist der Teich leergepumpt, wenn 30 min nach der ersten Motorspritze noch eine zweite mit einer Leistung von 500 l/min eingesetzt wird und die erste Pumpe zwischendurch einmal 10 Minuten ausfällt?

14) Ein Tourist war an 3 aufeinanderfolgenden Tagen jeweils genau die gleiche Zeit unterwegs. Am ersten Tag ging er zu Fuß mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 6 km/h . Am zweiten Tag benutzte er ein Moped mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h . Am dritten Tag benutzte er ein Auto mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h . Der insgesamt zurückgelegte Weg betrug 520 km .

a) Ermittle die Zeit, die er an jedem einzelnen Tag unterwegs war!

b) Wie viel Kilometer legte er an den einzelnen Tagen zurück?

15) Von einem U-Boot aus wird ein entgegenkommendes Schiff in 8 sm Entfernung ($1 \text{ sm} = 1,852 \text{ km}$) geortet. Nach 15 Minuten hat sich der Abstand auf $1,5 \text{ sm}$ verringert.

Mit welcher Geschwindigkeit fährt das Schiff, wenn das U-Boot mit einer Geschwindigkeit von 24 sm/h fährt?

16) Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrender Zug fuhr über eine 225 m lange Brücke in 27 Sekunden (gerechnet von der Auffahrt der Lok auf die Brücke bis zur Abfahrt des letzten Waggons von der Brücke).

An einem Fußgänger, der entgegen der Fahrtrichtung des Zuges ging, fuhr dieser in 9 Sekunden vorbei. In dieser Zeit hatte der Fußgänger 9 m zurückgelegt.

Ermittle die Länge des Zuges (in m) und seine Geschwindigkeit (in km/h)!

17) Gegeben seien drei Zahlen p, p_1, p_2 mit $0 < p_1 < p < p_2 < 100$.

Aus einer geeigneten Menge von $x \text{ kg}$ einer $p_1\%$ -igen Lösung eines Stoffes (d.h. einer Lösung, die $p_1\%$ dieses Stoffes und den Rest Wasser enthält) und einer geeigneten Menge von $y \text{ kg}$ einer $p_2\%$ -igen Lösung des gleichen Stoffes soll durch Zusammengießen eine $p\%$ -ige Lösung hergestellt werden

a) Ermittle das hierzu erforderliche Mischungsverhältnis, d.h. die Zahl $x : y$, zunächst für die speziellen Werte $p_1 = 25$, $p_2 = 60$, $p = 35$!

b) Stelle eine für beliebige (zulässige) Werte von p, p_1, p_2 gültige Formel für das Mischungsverhältnis auf!

(Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die Masse, nicht auf das Volumen.)

V E R M I S C H T E A U F G A B E N

V1) Ein Gast hat in der Spielbank Glück. Schon vier mal hintereinander verdreifachte sich sein Einsatz.

Wie viel hat er das erste Mal gesetzt, wenn er nun 3240 € besitzt?

V2) Axel multipliziert fünf natürliche Zahlen miteinander und erhält als Produkt eine ungerade Zahl.

Ist die Summe dieser fünf Zahlen gerade oder ungerade?

V3) Der Eierhändler wurde gefragt, wie viele Eier er an diesem Tage verkauft habe. Er antwortete: „Mein erster Kunde sagte 'Ich kaufe die Hälfte Ihrer Eier und ein halbes Ei.' Der zweite und der dritte Kunde sagten das Gleiche. Dann waren alle Eier verkauft.“

Wie viele Eier hat der Eierhändler insgesamt verkauft?

V4) In einem Quadrat ABCD wird ein gleichseitiges Dreieck ABE so angefügt, dass E im Inneren des Quadrates liegt.

Ermittle die Größe des Winkels CED !

V5) Frau Pünktlich stellt ihre Uhr am Donnerstag Abend um 20 Uhr genau nach dem Radio. Am Freitag um 12 Uhr bemerkt sie beim Zeitzeichen des Radios, dass ihre Uhr um 4 Minuten nachgeht. Sie vergisst jedoch, ihre Uhr richtig zu stellen. Am Montag möchte sie pünktlich um 8.40 Uhr aus dem Haus gehen.

Welche Zeit muss ihre Uhr zu diesem Zeitpunkt anzeigen?

Gib das Ergebnis in Stunden, Minuten und Sekunden an!

V6) Beweise, dass jede Zahl der Form $\overline{ab0ab}$ stets durch 91 teilbar ist!

Ermittle weitere Teiler dieser Zahl!

V7) 1990 gab es in Deutschland 35% Einzelhaushalte, 30% Haushalte mit zwei, 17% mit drei, 13% mit vier und 5% mit fünf Personen. Die Anzahl der Haushalte mit 6 oder mehr Personen war so gering, dass sie etwa 0% ausmachten.

Wie viel Prozent der Deutschen lebten 1990 allein?

Gib das Ergebnis als ganze Prozentzahl an!

V8) Auf einem Kreis $k(M;r)$ seien drei Punkte A, B, C so gelegen, dass $MA \perp MB$ sowie $\overline{BC} = \overline{BM}$ gilt und dass sich die Strecken \overline{AC} und \overline{MB} im Punkt S schneiden.

Untersuche, ob durch diese Voraussetzungen die Größe des Winkels BSC eindeutig bestimmt ist!

Wenn das der Fall ist, dann ermittle diese Größe !

V9) Ermittle alle rationalen Zahlen r mit folgender Eigenschaft:

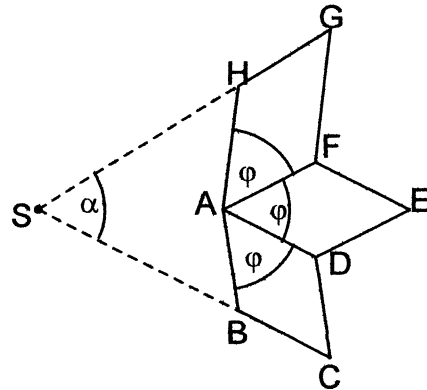
Subtrahiert man r vom Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ und addiert r zu diesem Nenner, dann erhält man einen Bruch, der halb so groß wie $\frac{3}{4}$ ist.

V10) Beweise: In jedem Dreieck ist die Länge des Umkreisradius größer als ein Sechstel der Länge des Umfangs dieses Dreiecks.

V11) Um wie viel ist die Summe der ungeraden sechsstelligen Zahlen größer als die Summe der geraden sechsstelligen Zahlen?

V12) Nebenstehende Figur stellt drei fächerförmig angeordnete Rhomben dar, deren spitzer Winkel eine Größe $\varphi < 60^\circ$ besitzt.

Drücke die Größe α des Winkels CSG allgemein durch φ aus!



V13) Zu Beginn einer Feier waren insgesamt genau viermal so viele Frauen wie Männer anwesend. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, waren genau fünfmal so viele Frauen wie Männer auf der Feier.

Wie viele Personen waren es insgesamt zu Beginn?

V14) Die drei natürlichen Zahlen a, b, c seien die Kantenlängen eines Quaders (in cm gemessen).

Ist es möglich, dass dieser Quader ein Volumen von 270 cm^3 und eine Gesamtkantenlänge von 80 cm aufweist?

V15) Das Produkt aus drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 56 mal so groß wie deren Summe.

Wie lauten diese drei Zahlen?

V16) Ermittle alle vierstelligen Zahlen \overline{abcd} , für die $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$ gilt!

V17) Zwei Züge fahren einander in entgegengesetzter Richtung vorbei, der eine mit der Geschwindigkeit von 36 km/h , der andere mit der von 45 km/h .

Ein Fahrgast, der im zweiten Zug saß, stellte fest, dass der erste Zug zur Vorbeifahrt an ihm 6 Sekunden brauchte.

Wie lang war der Zug?

V18) Sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden eines Dreiecks ABC .

a) Berechne die Größen der Winkel $\angle ASB = \delta$ und $\angle BSC = \varepsilon$, wenn $\angle BAC = \alpha = 42^\circ$ und $\angle CBA = \beta = 98^\circ$ gilt!

b) Berechne die Größe γ des Winkels $\angle ACB$, wenn $\angle ASB = \delta = 140^\circ$ gilt!

c) Beweise: Wenn $\angle ASB = \angle BSC$, dann ist das Dreieck ABC gleichschenkelig.

V19) Die Summe von 6 aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen beträgt 1992 . Ermittle die kleinste dieser Zahlen!

V20) Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei B und mit $\overline{AB} > \overline{BC}$. Die Mittelsenkrechte von \overline{AC} schneide \overline{AC} in M und \overline{AB} in E . Sei D derjenige Punkt auf der Geraden EM , für den AC den Winkel BAD halbiert.

Was lässt sich dann über das Viereck $ABCD$ aussagen?

Beweise deine Vermutung!

V21) Susann lässt sich je eine natürliche Zahl von Xaver, Yvonne und Zacharias sagen. Sie teilt ihnen dann die Summe dieser drei Zahlen mit. Jeder multipliziert die mitgeteilte Summe mit der ursprünglichen von ihm genannten Zahl. So erhält Xaver das Ergebnis 240, Yvonne 270 und Zacharias 390.

Untersuche, ob hierdurch die drei ursprünglich genannten Zahlen eindeutig bestimmt sind!

Ist dies der Fall, dann gib diese Zahlen an!

V22) Begründe, weshalb mit Ausnahme von zwei Primzahlen alle anderen bei Division durch 6 den Rest 1 oder den Rest 5 lassen!

Wie heißen die beiden Ausnahmen?

V23) Zu konstruieren sind alle Vierecke ABCD, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) ABCD ist ein Parallelogramm; (b) $\overline{AB} = a = 5 \text{ cm}$;
 (c) $\overline{BC} = b = 3 \text{ cm}$; (d) $\overline{BD} = f = 7 \text{ cm}$.

V24) In einem Dreieck ist der Außenwinkel von α um 28° kleiner als der Außenwinkel von γ . Der Außenwinkel von β ist um 50° kleiner als der Außenwinkel von γ . Wie groß sind die Außenwinkel und die Innenwinkel dieses Dreiecks?

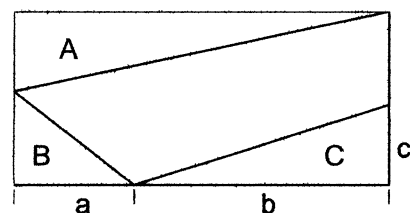
V25) Zwischen zwei Zahlen a und b werden durch $a \cdot b = 2ab$ und $a \# b = 2a - b$ zwei neue Rechenoperationen „ \cdot “ und „ $\#$ “ festgelegt.

- a) Welcher der beiden Terme $(12 \cdot 26) \# 8$ und $12 \cdot (26 \# 8)$ hat den größeren Wert?
 b) Ermittle alle Zahlen a , für die $a \cdot a = a \# a$ gilt!

V26) Wie groß ist die Summe aller fünfstelligen Zahlen, die man aus den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 bilden kann?

Jede Ziffer darf in jeder Zahl nur einmal verwendet werden.

V27) Im nebenstehenden Rechteck sind die Flächen A, B und C gleich groß. Gegeben sind ferner die Längen $a = 8 \text{ cm}$, $b = 16 \text{ cm}$ und $c = 6 \text{ cm}$. Wie groß ist die Fläche F?



V28)

- a) Ermittle alle Möglichkeiten, an die Zahl 331 eine vierte Ziffer so anzufügen, dass die entstehende Zahl durch 3 teilbar ist!
 b) Stelle fest, ob man an die Zahl 331 eine Ziffer 6 oder mehrere Ziffern 6 so anfügen kann, dass die entstehende Zahl durch 3 teilbar ist!

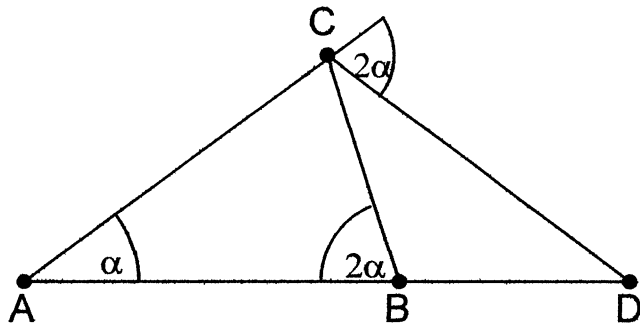
V29) Ein gleichschenkliges Trapez (das kein Quadrat ist) wird durch eine Diagonale in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt.

Ermittle die Innenwinkel dieses Trapezes!

V30) Die Seiten eines Buches werden fortlaufend, beginnend mit Seite 1, durchnummeriert. Dazu werden 3829 Ziffern benötigt.

Wie viele Seiten hat das Buch?

V31) Weise nach, dass das nebenstehend abgebildete Dreieck DCB gleichschenkelig ist!



V32) Klaus erzählt: "In meiner Klasse gibt es genau doppelt so viele Mädchen wie Jungen. Wären es 5 Jungen und 5 Mädchen weniger, dann hätten wir genau dreimal soviel Mädchen wie Jungen."

Wie viel Mädchen und wie viel Jungen sind in dieser Klasse?

V33) Zu konstruieren sind alle (konvexen) Fünfecke ABCDE, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) $\overline{AB} = \overline{CD} = 5 \text{ cm}$; (b) $\angle BAE = \angle CBA = 95^\circ$;
 (c) $\overline{BC} = \overline{CE} = \overline{BE}$; (d) $\overline{AE} = \overline{ED}$.

V34) Ermittle alle natürlichen Zahlen z , die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) $100 \leq z \leq 900$;
 (b) $13|z$ und $17|z$;
 (c) Vertauscht man die erste und die letzte Ziffer von z , dann erhält man eine Zahl, die
 a) um 99 kleiner als z ,
 b) um 99 größer als z ist.

V35) Beweise, dass man aus jeder dreistelligen Zahl durch Anfügen von höchstens drei Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl erhalten kann.

V36) In einem Parallelogramm ABCD mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ schneide die Winkelhalbierende des Winkels BAD die Verlängerung der Seite \overline{BC} im Punkt E. Der Umfang des Parallelogramms betrage $u = 36 \text{ cm}$ und es gelte $\overline{CE} = 3 \text{ cm}$.

Untersuche, ob sich hieraus die Seitenlängen des Parallelogramms eindeutig ermitteln lassen!

Ist dies der Fall, dann berechne diese Seitenlängen!

V37) Die Differenz zweier Zahlen ist 2, die Differenz ihrer Quadrate betrage 1000. Wie lauten diese beiden Zahlen?

V38) Wie viele sechsstellige Zahlen z , in denen jede der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 genau einmal vorkommt, sind durch 3, aber nicht durch 9 und sind durch 4, aber nicht durch 8 teilbar?

V39) Gegeben seien ein Parallelogramm ABCD und eine Gerade g , die dieses Parallelogramm nicht schneidet.

Beweise, dass die Summe der Entfernungen zweier gegenüberliegender Eckpunkte dieses Parallelogramms von der Geraden g stets gleich der Summe der Entfernungen der beiden anderen Eckpunkte von g ist!

V40) Es soll eine 15%-ige Natronlauge hergestellt werden.
Wie viel Gramm Ätznatron sind in 250 g Wasser zu lösen?

V41) Beweise folgenden Satz:

Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen eines Trapezes, dann erhält man eine (evtl. zu einem Punkt ausgeartete) Strecke, deren Länge halb so groß ist wie die Differenz der Längen der beiden parallelen Seiten.

V42) Von einem Ort A fährt ein Radfahrer ab, der stündlich 12 km zurücklegt. Ein Fußgänger hat einen Vorsprung von 9 km und legt stündlich 5 km zurück.
Nach wie viel Stunden holt der Radfahrer den Fußgänger ein, und wie viel Kilometer hat dabei der Fußgänger zurückgelegt?

V43) Die vierten Potenzen aller Primzahlen p außer 2 und 5 haben eine Eigenschaft gemeinsam.
Äußere eine Vermutung und beweise diese Vermutung!

V44) Über sechs Punkte A, B, C, D, E, F wird folgendes vorausgesetzt:
Dreieck ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck mit B als Scheitel des rechten Winkels.
 D liegt auf \overline{AB} ; E liegt auf \overline{BC} ; F liegt auf \overline{DB} . Die Dreiecke ADC , DEC , DFE und FBE haben denselben Flächeninhalt. Ferner gelte $\overline{FB} = 15 \text{ cm}$ und $\overline{BE} = 20 \text{ cm}$.

a) Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke \overline{AD} !

b) Drücke die Länge der Strecke \overline{AD} durch p und q aus, wenn $\overline{FB} = p \text{ cm}$ und $\overline{BE} = q \text{ cm}$ gilt!

V45) Vier LKW A, B, C und D befahren dieselbe Strecke.

Fährt A mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 56 km/h und B mit 40 km/h, dann benötigt A genau 2 Stunden weniger als B für diese Strecke.

Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit müsste C fahren, wenn D genau 4 Stunden eher als C abfahren, durchschnittlich mit 35 km/h fahren und gleichzeitig mit C am gemeinsamen Ziel ankommen soll?

V46) Beweise folgenden Satz:

Wenn in einem Dreieck zwei Höhen gleich lang sind, dann ist dieses Dreieck gleichschenkelig.

V47) Ein Frachter benötigt für eine Schiffsroute vom Hafen A zum Hafen B genau 12 Tage. Ein Tanker fährt diese Route in entgegengesetzter Richtung und braucht dafür 15 Tage. Der Frachter fährt 6 Tage später vom Hafen A ab als der Tanker vom Hafen B .

a) Wie viele Tage nach Abfahrt des Frachters treffen sich die beiden Schiffe, wenn sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahren?

b) Welchen Teil der Route hat dann jedes Schiff zurückgelegt?

V48) Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruente) Vierecke $ABCD$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$;
- (b) $\overline{AB} = p$, $\overline{CD} = q$ mit $0 < p < q$;
- (c) $k(M;p)$ ist Umkreis von $ABCD$.

V49) Gibt es zwei Zahlen, deren Summe, Produkt und Quotient übereinstimmen?

V50) Die Summe der Quadrate dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist um 65 größer als das Dreifache des Quadrats der kleinsten dieser Zahlen. Ermittle diese drei Zahlen!

V51) Gesucht sind alle vierstelligen Zahlen, die folgende Bedingung erfüllen: Die Summe aus der betreffenden Zahl selbst, ihrer Quersumme und der zwei einstelligen Zahlen, die durch die erste und die letzte Ziffer dargestellt werden, beträgt 5900 .

V52) Von dem Diagonalschnittpunkt M eines Rhombus $ABCD$ werden die Lote auf die Seiten gefällt.

- a) Beweise, dass die Fußpunkte dieser Lote ein Rechteck bilden!
- b) In welchem Fall bilden die Lotfußpunkte ein Quadrat?
Beweise deine Vermutung!

V53) Ein vollständig gefülltes Wasserbecken besitzt einen großen und einen kleinen Abflusshahn. Öffnet man nur den großen Hahn, dann läuft das Becken in genau einer Stunde aus; öffnet man nur den kleinen Hahn, dann ist das Becken in genau drei Stunden leer.

Nach welcher Zeit ist das Becken leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind? Für jeden der beiden Hähne wird vorausgesetzt, dass aus ihm jeweils in gleich langen Zeiten gleich große Wassermengen entströmen.

V54) Beweise folgende Aussage:

Wenn p und q Primzahlen sind, für die $q - p = 2$ und $p > 3$ gilt, dann folgt:

- (a) Das arithmetische Mittel aus p und q ist durch 3 teilbar.
- (b) Vergrößert man das Produkt von p und q um 1, dann entsteht eine durch 18 teilbare Zahl.

V55) Zu konstruieren sind alle Vierecke $ABCD$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) $ABCD$ ist ein Parallelogramm ;
- (b) $\overline{AB} = a = 5 \text{ cm}$,
- (c) $\overline{AC} = e = 4 \text{ cm}$;
- (d) $\overline{BD} = f = 8 \text{ cm}$.

V56) Zum Experimentieren wird eine 30%-ige Salzlösung benötigt. Vorhanden sind aber lediglich 2 Liter 10%-ige Salzlösung sowie eine Flasche mit 42%-iger Salzlösung.

Ermittle, wie viel Liter 42%-ige Salzlösung den 2 Litern 10%-iger Salzlösung zuzusetzen sind, damit eine 30%-ige Salzlösung entsteht!

V57) Gibt es eine Gerade, von der die Eckpunkte eines Dreiecks ABC den gleichen Abstand haben?

Ist die Lösung eindeutig?

V58) Ermittle die kleinste achtstellige natürliche Zahl z , die folgende Bedingungen erfüllt:

- (a) Alle Ziffern in der dezimalen Darstellung von z sind voneinander verschieden.
- (b) Die Zahl z ist durch 36 teilbar.

V59) Zu konstruieren sind alle Vierecke ABCD, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (a) ABCD ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$; (b) $\overline{AB} = a = 5 \text{ cm}$;
- (c) $\overline{BC} = b = 3,5 \text{ cm}$; (d) $\overline{CD} = c = 2,5 \text{ cm}$.
- (e) die Höhe von ABCD hat die Länge $h = 3 \text{ cm}$.

V60) Bei einem Flug mit der Gesellschaft Mathe-Airlines kann jeder Passagier x kg Gepäck kostenlos mitführen. Herr und Frau Schmidt haben zusammen 58 kg Gepäck. Sie zahlen zusammen 32 € für Mehrgewicht. Würde Herr Schmidt die Reise allein mit dem gemeinsamen Gepäck antreten, dann hätte er 132 € zu zahlen.

Wie viel kg Gepäck kann eine Person ohne Gebühr mitnehmen?

V61) Von einem Parallelogramm ABCD wird vorausgesetzt, dass die Winkelhalbierende von Winkel BAD und von Winkel CBA einander in einem Punkt E schneiden, der auf \overline{CD} liegt.

Ferner gelte $\overline{AE} = 7 \text{ cm}$ und $\overline{BE} = 5 \text{ cm}$.

a) Ermittle aus diesen Voraussetzungen den Flächeninhalt des Parallelogramms!

b) Drücke den Flächeninhalt des Parallelogramms durch u und v aus, wenn

$\overline{AE} = u \text{ cm}$ und $\overline{BE} = 5 \text{ cm}$ gilt!

V62) Elke und Alf sind gute Jogger. Sie laufen zur gleichen Zeit an den entgegengesetzten Enden ihrer gemeinsamen Joggingstrecke los. Alf ist gerade 3500 Schritte gelaufen, als ihm Elke begegnet. An den Enden der Strecken wenden sie unverzüglich und laufen zu ihren Startpunkten zurück. Als Alf die Elke zum zweiten Mal trifft, hat er nach seiner Wende 2500 Schritte gemacht.

a) Wer ist schneller?

b) Wie lang ist die Joggingstrecke, gemessen in Schritten von Alf?

V63) Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $\overline{AB} = \overline{AC}$. Der Mittelpunkt der Seite \overline{BC} sei mit D, der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} sei mit E bezeichnet. Der Schnittpunkt von \overline{AD} mit \overline{CE} sei mit S bezeichnet.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck ACS und das Viereck BDSE stets den gleichen Flächeninhalt besitzen!

V64) Sei E derjenige Punkt im Inneren eines Quadrats ABCD mit der Seitenlänge a , für den ECD ein gleichseitiges Dreieck ist, und sei F derjenige Punkt außerhalb von ABCD, für den BFC ein gleichseitiges Dreieck ist.

a) Berechne die Innenwinkel der Dreiecke EFC und BFE!

b) Berechne die Flächeninhalte der Dreiecke EFC und ABF!

c) Untersuche, ob der Schnittpunkt S der Geraden EF mit der Geraden AD zwischen A und D oder auf der Verlängerung von \overline{DA} über A hinaus liegt oder mit A zusammenfällt!

V65) Gegeben sei ein spitzer Winkel mit dem Scheitel A und den Schenkeln a und b . Im Inneren dieses Winkels liege ein Punkt P .

Zu konstruieren ist diejenige Gerade g durch P , die a in B und die b in C so schneidet, dass $\overline{BP} = \overline{PC}$ gilt!

V66) Ein Radfahrer fuhr mit konstanter Geschwindigkeit über eine 100 m lange Brücke. Als er auf dieser Brücke 40 m zurückgelegt hatte, traf er einen zweiten Radfahrer, der ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegen kam. Ein Auto, das auf derselben Strecke mit der Geschwindigkeit 70 km/h fuhr, begegnete dem zweiten Radfahrer in dem Augenblick, als dieser die Brücke verließ, und überholte den ersten Radfahrer genau am anderen Ende der Brücke.

Ermittle aus diesen Angaben die Geschwindigkeit der Radfahrer!

V67) Ermittle die kleinste natürliche Zahl, die folgende Bedingungen erfüllt:

- (a) Sie selbst und ihre Quersumme sind durch 3 und durch 5 teilbar.
- (b) Die Zahl besteht nur aus den Ziffern 3 und 5, wobei jede dieser Ziffern mindestens einmal vorkommt.

V68) Sei \overline{CD} eine Höhe im nicht stumpfwinkligen Dreieck ABC . Sei E bzw. F der Bildpunkt von D bei der Spiegelung an AC bzw. BC .

a) Ermittle den Flächeninhalt und den Umfang des Fünfecks $ABFCE$, wenn $\overline{AB} = c$ ($= 7$ cm) und $\overline{CD} = h$ ($= 4$ cm) gilt!

b) Wie groß ist der Winkel $\angle ACB = \gamma$, wenn vorausgesetzt wird, dass die Punkte E, C, F auf einer Geraden liegen?

Beweise, dass das Viereck $ABFE$ dann stets ein Trapez ist!

V69) Amanda und Berthold lassen ihre Autos auf einem Rundkurs mit konstanter Geschwindigkeit kreisen. Wenn sie im gleichen Sinn herum fahren, überholt Bertholds Auto das von Amanda alle 20 Sekunden; wenn sie entgegengesetzt herum fahren, begegnen sich die Autos alle 5 Sekunden.

Wie viele Sekunden braucht jedes Auto für diesen Rundkurs?

V70) Zeichne ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck ABC . Verlängere die Seite \overline{AC} über C hinaus um sich selbst bis D . Spiegle dann den Punkt D an der Geraden BC und bezeichne den Bildpunkt mit D' . Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AD'}$ werde mit E bezeichnet.

Beweise folgende Aussagen:

- (a) D' liegt auf dem Kreis mit dem Durchmesser \overline{AD} .
- (b) EC ist die Winkelhalbierende des Winkels ACD' .
- (c) EC steht auf BC senkrecht.

V71) Beweise, dass die Summe der Quadrate von fünf aufeinander folgenden natürlichen Zahlen keine Quadratzahl sein kann!

MERKSTOFF

Zahlentheorie

Zu jeder ganzen Zahl a und jeder positiven ganzen Zahl m gibt es stets genau ein Paar q, r von ganzen Zahlen, so dass gilt:

$$a = q \cdot m + r \quad \text{mit } 0 \leq r < m; \quad \textit{Grundgleichung der Zahlentheorie} .$$

Dabei heißt r der "positiv (nichtnegativ) kleinste Rest" zu gegebenem a und m .

Seien a, b, c und q beliebige ganze Zahlen (es gelte $a, b, c, q \in \mathbb{Z}$) .

Definition: $a|b \Leftrightarrow_{\text{Def}}$ Es gibt ein q , so dass $b = q \cdot a$.

Sätze: (S1) $a|b$ und $b|c \Rightarrow a|c$; (Transitivität der Teilbarkeitsbeziehung) .

$$(S2) \quad a|b \text{ und } a|c \Rightarrow a|(b + c) .$$

$$(U2) \quad a|b \text{ und } a|(b + c) \Rightarrow a|c .$$

$$(S3) \quad a|b \text{ und } a|c \Rightarrow a|bc .$$

$$(S4) \quad a|c \text{ und } b|c \text{ und } a, b \text{ teilerfremd} \Rightarrow ab|c .$$

$$(U4) \quad ab|c \Rightarrow a|c \text{ und } b|c .$$

Arithmetik und mengentheoretisch - logische Grundlagen

Definition: Alle Zahlen, die sich in Form eines (gekürzten) Bruches darstellen lassen, heißen rationale Zahlen; die Menge der rationalen Zahlen bezeichnet man mit \mathbb{Q} .

[Jede rationale Zahl lässt sich in Form eines endlichen oder eines periodischen Dezimalbruchs darstellen.]

Definition: Jede Zahl, die keine rationale Zahl ist, heißt irrationale Zahl .

[Jede irrationale Zahl lässt sich in Form eines unendlichen nicht periodischen Dezimalbruchs darstellen. Wenn die (nichtnegative) Basis einer Quadratwurzel nicht das Quadrat einer rationalen Zahl ist, dann ist diese Wurzel eine irrationale Zahl; z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$.]

Definition: Die Vereinigung der Menge der rationalen Zahlen und der Menge der irrationalen Zahlen heißt Menge der reellen Zahlen und wird mit \mathbb{R} bezeichnet.

Für alle reellen Zahlen gilt:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd ; \quad \textit{(Distributivgesetz) .}$$

$$ab + ac = a(b + c) ; \quad \textit{(Ausklammern eines gemeinsamen Faktors) .}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; \quad \textit{(binomische Formeln) ;}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 ; \quad \textit{auch verwendbar für das Zerlegen einer}$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad \textit{Summe von Termen in Faktoren) .}$$

Eine Aussageform ist ein Ausdruck mit einer oder mehreren Variablen, der in eine Aussage übergeht, wenn man alle vorkommenden Variablen interpretiert (d.h. wenn man für die Variablen bestimmte Elemente aus dem Variablengrundbereich einsetzt).

Die Menge aller $x \in X$, für die eine Aussageform $H(x)$ beim Interpretieren in eine wahre Aussage übergeht, nennt man die Erfüllungsmenge dieser Aussageform über dem Grundbereich X .

Somit bestimmt jede Aussageform $H(x)$, $x \in X$ eindeutig eine (Erfüllungs-) Menge $M = \{x \in X \mid H(x)\}$ (und damit eine Eigenschaft der Elemente des Grundbereichs X).

Gleichheit von Mengen: $M = N \Leftrightarrow_{\text{Def}} x \in M \text{ genau dann, wenn } x \in N$

Teilmengenbeziehung: $M \subseteq N \Leftrightarrow_{\text{Def}} \textit{Wenn } x \in M, \text{ dann } x \in N$

Durchschnitt von Mengen: $M \cap N =_{\text{Def}} \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$

Vereinigung von Mengen: $M \cup N =_{\text{Def}} \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$

Kreuzprodukt von Mengen: $M \times N =_{\text{Def}} \{ [x,y] \mid x \in M \text{ und } y \in N \}$

f ist eine Abbildung aus M in $N \Leftrightarrow_{\text{Def}} f$ ist eine Teilmenge von $M \times N$; ($f \subseteq M \times N$)
Konstanten, Variable und deren sinnvolle Zusammensetzung mit Hilfe von Operationszeichen nennt man Terme.

(Ersetzt man die Variablen eines Terms durch Konstanten, dann geht dieser in die Bezeichnung eines Objekt, also in eine Konstante über. Terme enthalten keine Relationszeichen.)

Als Definitionsbereich eines Terms $T(x)$ bezeichnet man die Menge aller Elemente aus dem vorgegebenen Variablengrundbereich dieses Terms, für die dieser definiert ist.

Als Gleichung bzw. Ungleichung mit dem Lösungsgrundbereich X bezeichnet man Aussageformen der Gestalt $T_1(x) = T_2(x)$, $x \in X$ bzw. $T_1(x) < T_2(x)$, $x \in X$.

Als Lösungsgrundbereich (Erfüllungsgrundbereich) einer GI/Ugl bezeichnet man den Durchschnitt der Definitionsbereiche der vorkommenden Terme.

Als Lösungsmenge (Erfüllungsmenge) einer GI/Ugl bezeichnet man diejenige Teilmenge des Lösungsgrundbereichs, deren Elemente die GI/Ugl erfüllen (d.h. die bei Interpretation aller Variablen die GI/Ugl in eine wahre Aussage überführen).

Die Lösungsmenge von $a < x < b$, $x \in \mathbb{R}$ heißt offenes Intervall und wird mit $(a;b)$ bezeichnet. Die Lösungsmenge von $a \leq x \leq b$, $x \in \mathbb{R}$ heißt abgeschlossenes Intervall und wird mit $\langle a;b \rangle$ bezeichnet. Die Lösungsmenge von $x < a$, $x \in \mathbb{R}$ bzw. $x > a$, $x \in \mathbb{R}$ wird mit $(-\infty;a)$ bzw. $(a;\infty)$ bezeichnet.

Eine GI/Ugl lösen heißt, auf irgendeine (möglichst geschickte) Weise ihre Lösungsmenge ermitteln.

(Bevor man durch äquivalentes Umformen die GI/Ugl solange vereinfacht, bis man ihre Lösungsmenge ablesen kann, sollte man stets versuchen, diese Lösungsmenge durch Betrachten der Definitionsbereiche und der Wertebereiche der vorkommenden Terme oder durch andere inhaltliche Überlegungen zu finden.)

Zwei GI/Ugl heißen über einem Lösungsgrundbereich äquivalent genau dann, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen.

Regeln für das äquivalente Umformen von Gleichungen und Ungleichungen

Man ermittle zunächst stets den Lösungsgrundbereich der GI/Ugl. Terme, die auf beiden Seiten der Gleichung addiert oder mit denen beide Seiten multipliziert werden, müssen stets in diesem Lösungsgrundbereich erklärt sein.

Es gelten folgende Regeln:

$$(1) T_1(x) \leq T_2(x) \quad \text{äq} \quad T_1(x) \pm T(x) \leq T_2(x) \pm T(x) .$$

(Man darf auf beiden Seiten einer GI/Ugl denselben Term addieren oder subtrahieren.)

$$(2a) T_1(x) = T_2(x) \quad \text{äq} \quad T_1(x) \cdot T(x) = T_2(x) \cdot T(x) , \text{ wenn } T(x) \neq 0 .$$

$$(2b) T_1(x) < T_2(x) \quad \text{äq} \quad T_1(x) \cdot T(x) < T_2(x) \cdot T(x) , \text{ wenn } T(x) > 0 .$$

$$(2c) T_1(x) < T_2(x) \quad \text{äq} \quad T_1(x) \cdot T(x) > T_2(x) \cdot T(x) , \text{ wenn } T(x) < 0 .$$

(Multipliziert man beide Seiten einer GI/Ugl mit einem Term $T(x)$, der für gewisse x gleich Null wird, dann muss man für diese Werte von x gesondert untersuchen, wie sich die Lösungsmenge beim Übergang von der Ausgangs-GI/Ugl zur umgeformten GI/Ugl ändert. In der Regel sind solche Werte von x gar nicht im Lösungsgrundbereich enthalten.)

Bei Ungleichungen muss in der Regel eine Fallunterscheidung durchgeführt und sowohl Regel (2b) als auch Regel (2c) angewendet werden. Multipliziert man eine Ungleichung mit einem negativen Term, dann ändert sich das Ungleichheitszeichen.

(3) Wenn $T_1(x)$ oder $T_2(x)$ identisch umgeformt wird und dabei der Lösungsgrundbereich erhalten bleibt, dann ist die umgeformte GI/Ugl der Ausgangs-GI/Ugl äquivalent.

(4) $T_1(x) \leq T_2(x) \quad \text{äq} \quad T_1^2(x) \leq T_2^2(x)$, wenn $T_1(x) \geq 0$ und $T_2(x) \geq 0$.

(Diese Regel wird meist angewendet, wenn man Quadratwurzeln aus einer GI/Ugl beseitigen will. Für alle Werte von x , die die angegebenen Bedingungen nicht erfüllen, muss gesondert untersucht werden, ob sie zur Erfüllungsmenge gehören oder nicht.)

Einige wichtige Ungleichungen

Satz: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn $x > 0$, dann $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Satz: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$
(Dreiecksungleichungen) $|a + b| \leq |a| + |b|$

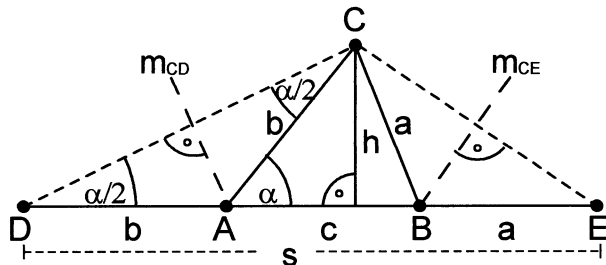
Satz	arithmetisches Mittel		geometrisches Mittel		harmonisches Mittel
$x, y > 0$	$\frac{x+y}{2}$	\geq	\sqrt{xy}	\geq	$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$
$x_1, \dots, x_n > 0$	$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$	\geq	$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$	\geq	$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$

Geometrie (Musterlösung für eine Konstruktionsaufgabe)

Aufgabe:

Zu konstruieren sind alle (bis auf Kongruenz verschiedenen) Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $\overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB} = s = 12 \text{ cm}$;
- $\angle BAC = \alpha = 60^\circ$;
- $\overline{CH} = h = 4 \text{ cm}$;
- \overline{CH} ist Höhe im Dreieck ABC .



a) Konstruktionsbeschreibung:

(Mit m_{XY} wird die Mittelsenkrechte der Strecke \overline{XY} bezeichnet.)

- $\overline{DE} = s = 12 \text{ cm}$;
- $\angle EDX = \frac{\alpha}{2} = 30^\circ$; [das Antragen des Winkels im negativen Drehsinn liefert ein zum Lösungsdreieck kongruentes Dreieck] .
- Parallelenpaar $(g; g_1)$ zu DE im Abstand $h = 4 \text{ cm}$;
[die Berücksichtigung von g_1 liefert keine weitere Lösung].
- $g \cap DX = \{C\}$; [eindeutig konstruierbar, weil $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 180^\circ$] .
- $m_{CD} \cap \overline{DE} = \{A\}$; [für die gegebenen Daten eindeutig konstruierbar] .
- $m_{CE} \cap \overline{DE} = \{B\}$; [für die gegebenen Daten eindeutig konstruierbar, und es liegt B zwischen A und C] .

Dreieck ABC ist die einzige Lösung unserer Aufgabe.

b) *Einzigkeitsnachweis:*

Es gibt auf der Geraden \overline{AB} genau einen Punkt D , für den $\overline{AD} = \overline{AC}$ (mit A zwischen B und D) sowie genau einen Punkt E , für den $\overline{BE} = \overline{BC}$ (mit B zwischen A und E) gilt.

Wegen (a) gilt dann $\overline{DE} = s$.

Wegen (b) gilt für das gleichschenklige Dreieck CDA nach dem Außenwinkelsatz $\angle ADC = \frac{\alpha}{2}$.

d.h. C liegt auf dem freien Schenkel des Winkels $\angle EDX = \frac{\alpha}{2}$.

Wegen (c) und (d) liegt C auf einer Parallelen zu DE im Abstand h .

(Damit kennt man 2 geometrische Örter für den gesuchten Punkt C .)

Wegen $\overline{AD} = \overline{AC}$ liegt A auf der Mittelsenkrechten m_{CD} . Da A außerdem auf DE liegt, sind für diesen gesuchten Punkt ebenfalls zwei geometrische Örter bekannt.

Analog folgt, dass der gesuchte Punkt B auf m_{CE} und auf \overline{DE} liegt.

Damit ist gezeigt:

Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (a), (b), (c), (d) erfüllt, dann lässt es sich wie unter a) beschrieben mit Hilfe der Schritte (1) bis (6) konstruieren.

c) *Existenznachweis:*

Sei H der Fußpunkt des Lots von C auf \overline{AB} .

Wegen (5) und (6) liegen A und B auf \overline{DE} .

Wegen (3) und (4) ist daher \overline{CH} eine Höhe im Dreieck ABC und hat die Länge h , d.h. die Bedingungen (c) und (d) sind erfüllt.

Aus (5) und (6) folgt $\overline{DE} = \overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BE}$ sowie (nach einem Satz über Mittelsenkrechte) $\overline{AD} = \overline{AC}$ und $\overline{BE} = \overline{BC}$.

Wegen (1) folgt hieraus dann $\overline{AC} + \overline{AB} + \overline{BC} = s$, d.h. die Bedingung (a) ist erfüllt.

Wegen $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt $\angle ADC = \angle ACD$; wegen (2) folgt hieraus (nach dem Außenwinkelsatz für Dreieck CDA) $\angle BAC = \alpha$, d.h. auch die Bedingung (b) ist erfüllt.

Damit ist gezeigt:

Wenn ein Dreieck ABC mit Hilfe der Schritte (1) bis (6) konstruiert wurde, dann erfüllt es die Bedingungen (a), (b), (c), (d).

2. Lösungsweg, Konstruktionsbeschreibung:

- (1) $\overline{AD} = s$;
- (2) $\angle DAX = \alpha$;
- (3) Parallelenpaar $(g; g_1)$ zu AD im Abstand h ;
- (4) $\overline{AX} \cap g = \{C\}$;
- (5) $E \in \overline{AD}$ mit $\overline{ED} = \overline{AC}$;
- (6) $m_{CE} \cap \overline{AE} = \{B\}$.

Auftrag: Formuliere zu dieser Konstruktionsbeschreibung einen Einzigkeitsnachweis und einen Existenznachweis!

Fertige zu beiden Konstruktionsbeschreibungen eine genaue Konstruktionszeichnung an!