Zur didaktischen Zielstellung

Die ***Auswahl und Anordnung der*** hier gestellten ***Aufgaben*** dient dem Ziel, in der außerunterrichtlichen Förderung von Schülern deren *Fähigkeit zum problemlösenden Denken* zu entwickeln. Daher werden hier nur solche Aufgaben gestellt, zu deren Lösung der Schüler kein algorithmisches Verfahren beherrscht, das zum Ziel führt.

Sachaufgaben sind den Schülern aus dem Unterricht in Klasse 5 und 6 bekannt. In der Regel ist hier dem Sachverhalt zu entnehmen, dass eine solche Aufgabe stets *genau eine Lösung* hat. Dies wird durch Fragen oder Aufforderungen folgender Art vorausgesetzt: „Wie viele ...", „Wann ...", „Wie lange ...", „Berechne ...".
Über den Unterricht hinausgehend soll den Schülern vermittelt werden, dass dies keineswegs selbstverständlich ist. Dies wird durch Formulierungen wie „Weise nach, dass sich eindeutig ermitteln lässt ... .", „Untersuche ob sich .... eindeutig ermitteln lässt." erreicht. Dies geschieht in den Aufgaben S1, S6, S12 und S13.

Logisch-kombinatorische Aufgaben haben die Schüler bereits in der außerunterrichtlichen Förderung der Klassen 5 und 6 kennen gelernt, bei denen in der Regel die eindeutige Lösbarkeit vorausgesetzt wird. Dies ist hier nur noch bei den Aufgaben L1, L2 und L3 der Fall. In allen anderen Aufgaben wird ein Nachweis oder eine Untersuchung gefordert.
Zum ersten Mal werden bei den Aufgaben L1, L4 und L5 *Lösungsschemata* zum Darstellen der Lösung verwendet.

Bei den *zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben* wird der besonders wichtige *Aufgabentyp „Ermittle alle ... "* eingeführt. Um hervorzuheben, dass bei diesen Aufgaben stets ein *Einzigkeitsnachweis* (Herleitung) und ein *Existenznachweis* (Probe) erforderlich sind, werden diese beiden Beweise in der Lösung stets durch I. und II. gekennzeichnet. Am Ende von I. wird stets der damit bewiesene Satz in der Wenn-dann-Form angegeben. Abschließend wird stets hervorgehoben, dass aus I. und II. folgt, dass tatsächlich *alle* gesuchten Elemente ermittelt wurden. Dies geschieht bei den Aufgaben Z3 - Z10.
Bei den Aufgaben Z1, Z3, Z5, Z6, Z8, Z10 und Z11 wird der Schüler in den „Hinweisen zur Lösungsfindung" erstmals aufgefordert, sich *im „Arbeitsmaterial" Stoff anzueignen*, der über den Unterrichtsstoff hinausgeht. Hier sollte der *Betreuer* folgende Aufgabe übernehmen: Den Schüler zu befähigen, derartiges Material durchzuarbeiten, etwa durch Unterstreichen der wichtigsten Passagen, der Überprüfung anhand selbst gewählter Beispiele u.Ä. Der Schüler sollte auch die Erfahrung machen, dass ein mathematischer Text in der Regel erst nach dem zweiten Durcharbeiten verstanden werden kann.

Im Unterricht lernt der Schüler die ersten Beweise auf dem Gebiet der Geometrie kennen. Im außerunterrichtlichen Bereich ist es aus didaktischen Gründen günstiger, mit *zahlentheoretischen Beweisaufgaben* zu beginnen.
Zunächst ist es wichtig, dass der zu beweisende Satz in Voraussetzungen und Behauptung aufgespaltet und in der Wenn-dann-Form formuliert wird. Die Voraussetzungen erhalten die Bezeichnungen V_1, V_2, ... Um der falschen Auffassung zu begegnen, dass die Behauptung des Satzes zu beweisen ist, verwenden wir in den Aufgaben Z12 bis Z21 stets die Formulierung „Beweise folgenden Satz" und beenden die zugehörige Lösung mit „Damit ist bewiesen, dass die Behauptung des Satzes aus dessen Voraussetzungen folgt.".

Anknüpfend an die bei den logisch-kombinatorischen Aufgaben eingeführten *Lösungsschemata* werden hier bei den Aufgaben Z12 - Z17 *Beweisschemata* verwendet.
Bei den Aufgaben Z15 und Z18 - Z20 wird der Schüler aufgefordert, sich *im „Arbeitsmaterial“ Stoff anzueignen*.

Bei den *geometrischen Bestimmungsaufgaben*, die man im Unterricht stellt, werden nur konkrete Größen verwendet. Hier ist es wichtig, die Schüler auch mit *parameterhaltigen Aufgaben* vertraut zu machen, wofür die Aufgaben G2b, G3b, G5 - G7 bestimmt sind.
In den Aufgaben G3c und G4c wird verlangt, *Bedingungen* für die gegebenen Größen zu *ermitteln*, unter denen eine vorgegebene Behauptung gilt.
Nur in den Aufgaben G1 bis G4 ist eine günstig gezeichnete *Planfigur* gegeben. In allen anderen Aufgaben müssen die Schüler eine solche Figur selbst entwerfen. Hier sollen die Schüler erfahren, dass eine derartige Figur nur der Veranschaulichung und dem Einführen von Bezeichnungen für Punkte, Geraden, Streckenlängen und Winkelgrößen dient und dass sie nicht als Argument in der Lösung verwendet werden darf. Auch das Anfertigen einer *günstigen* Planfigur will erlernt sein!
Bei den Aufgaben G1 - G3 und G5 wird der Schüler aufgefordert, sich *im „Arbeitsmaterial“ Stoff anzueignen*.

Bei den *geometrischen Beweisaufgaben* G8 - G17 müssen die Schüler die *Planfigur* stets selbst anfertigen.
Wenn für die Lösung einer Beweisaufgabe ein Hilfspunkt oder eine Hilfsgröße benötigt werden, dann reicht es nicht aus, dies nur in der Planfigur festzuhalten. Man muss derartiges explizit durch eine *Zusatzvoraussetzung* festhalten, die man mit *ZV* bezeichnen kann, siehe die Aufgaben G16 und G17.
Bei den Aufgaben G8 - G15 werden zur Darstellung der Lösung *Beweisschemata* verwendet.
Bei den Aufgaben G8 - G13, G15 und G16 wird der Schüler aufgefordert, sich *im „Arbeitsmaterial“ Stoff anzueignen*.

Erfahrungsgemäß gehören die *geometrischen Konstruktionsaufgaben* zu denjenigen Aufgaben, die den Schülern in Klausurwettbewerben die meisten Schwierigkeiten bereiten. Sie erscheinen den Schülern als eine ganz besondere Aufgabenklasse ohne Verbindung mit anderen Aufgabenklassen.
Konstruktionsaufgaben gehören zu dem besonders wichtigen *Aufgabentyp „Ermittle die Erfüllungsmenge einer (oder einer Konjunktion von) Aussageformen“* deren Aufgabentext mit der Aufforderung „*Ermittle alle* ... “ beginnt.
Wir haben diesen Aufgabentyp bei den zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben eingeführt. Auch bei logisch-kombinatorischen Aufgaben kann man fordern, *alle* Anordnungen oder Zuordnungen zu ermitteln, welche die gestellten Bedingungen erfüllen. Das Ermitteln der Erfüllungsmenge von Gleichungen, Ungleichungen oder Gleichungssystemen, die nicht algorithmisch lösbar sind, gehört ebenfalls zu diesem Aufgabentyp.
Man sollte aus didaktischen Gesichtspunkten hervorheben, dass auch die Konstruktionsaufgaben zu diesem Aufgabentyp gehören, wenn man fordert, dass *stets alle Figuren* zu konstruieren sind, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen. Dann entpuppt sich der früher „Analyse“ genannte Aufgabenteil als *Einzigkeitsnachweis*, der „Beweis“ als *Existenznachweis* und die *Determination* ist nichts anderes als die bei parameterhaltigen Aufgaben auftretende Determination.
Die Konstruktionsaufgaben unterscheiden sich nur in einer Hinsicht von den anderen Aufgaben dieses Aufgabentyps: An die Stelle der Angabe der gesuchten Erfüllungs-

menge wird die Angabe eines Algorithmus (Konstruktionsbeschreibung genannt) verlangt, mit dem alle gesuchten Figuren erzeugt werden können.
Nur in den Aufgaben G18 und G19 wird vom Schüler gefordert, eine *Konstruktionszeichnung* anzufertigen, um sich zu überzeugen, ob die Konstruktionsbeschreibung zum Ziel führt. Bei den restlichen Aufgaben wird nur gefordert, dass der Schüler in der Lösung eine *Planfigur* anfertigt. Das Erwerben der Fähigkeit, nur mit Zirkel und Lineal eine „genaue" Zeichnung anzufertigen, gehört in das Gebiet der darstellenden Geometrie. Die Frage, welche Konstruktionen allein mit Zirkel und Lineal durchführbar sind und für welche Konstruktionsaufgaben dies nicht zutrifft, gehört zu einer sehr interessanten aber anderen Aufgabenklasse als die hier betrachteten Konstruktionsaufgaben. Aus didaktischer Sicht ist es daher ungeschickt, bei den Konstruktionsaufgaben solche zusätzliche Forderungen zu stellen.
Beim Formulieren aller Konstruktionsaufgaben G18 - G22 und der zugehörigen Lösungen wurde darauf geachtet, die Zugehörigkeit zu der genannten Aufgabenklasse hervor zu heben. Am Ende des *Einzigkeitsnachweises* steht stets: Wenn eine Figur die gegebenen Bedingungen erfüllt, dann lässt sie sich wie beschrieben konstruieren. Am Ende des *Existenznachweises* steht stets: Wenn eine Figur wie beschrieben konstruiert wurde, dann erfüllt sie die gegebenen Bedingungen. Auf diese Weise wird hervorgehoben, dass hier ein *Satz* und dessen *Umkehrung* und damit ein *Genau-dann-wenn-Satz* bewiesen wurde. Daher ist nachgewiesen, dass tatsächlich alle gesuchten Elemente ermittelt wurden.
Um die „Lesbarkeit" eines Textes zu erhöhen, ist es aus didaktischer Sicht wichtig, auch bei Konstruktionsaufgaben die *Textsprache in eine Symbolsprache* zu *übersetzen*. Daher wird die Konstruktionsbeschreibung in einer *Kurzform* formuliert.
In den Lösungshinweisen zur G20 wird gezeigt, wie man den *Lösungsplan* für eine Konstruktionsaufgabe übersichtlich festhalten kann.
Bei der Aufgabe G18 wird der Schüler aufgefordert, sich *im „Arbeitsmaterial" Stoff anzueignen*.

Wenn der Bearbeiter einer Aufgabe kein algorithmisches Verfahren kennt, das ihn mit Sicherheit zur Lösung führt, dann ist diese Aufgabe für ihn *problemhaft*. In diesem Fall muss eine *Phase der Lösungsfindung*, in der ein *Lösungsplan* gefunden wird, erst erfolgreich abgeschlossen werden, bevor der Bearbeiter mit der von ihm geforderten *Darstellung der Lösung* beginnen kann.

In der ***Phase der Lösungsfindung*** muss der Schüler zuerst die *Aufgabe verstehen.*
Dies beschränkt sich nicht darauf, bei unbekannten Begriffen (möglichst selbständig aus der Literatur) nach der Definition zu suchen. Man sollte sich fragen, ob man eine *ähnliche Aufgabe* schon einmal gelöst hat, welche günstige *Veranschaulichung* (Figur, Skizze, Tabelle u.Ä.) möglich ist, welches die *Startgrößen* (gegebene Größen oder Bedingungen; Voraussetzungen) und *Zielgrößen* (gesuchte Größe oder Antwort; Behauptung) sind, welche *günstige Bezeichnungen* (Variable, zweckmäßige Symbolik) man einführen kann, um sie übersichtlich festhalten zu können.
Bei vielen Sachaufgaben und zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben ist es günstig, für rationale Zahlen oder ganze Zahlen *Variable* einzuführen und den Aufgabentext in die *Sprache der Gleichungen* zu übersetzen. Dies ist bei den Aufgaben S1, S3, S4, S8 - S12 und Z1, Z2, Z7, Z8 und Z12 - Z17 der Fall. In den Aufgaben Z3 - Z6 und Z9 sind die Gleichungen im Aufgabentext schon gegeben.
Bei den Aufgaben S13, L1, L3, L4 - L10 ist es günstig, für Namen, Berufe, Unterrichtsfächer u.Ä. *abkürzende Bezeichnungen* einzuführen. Hier darf man nicht ver-

gessen, die Bedeutung der verwendeten Relationszeichen „=“, „$\neq$“ und „<“ explizit zu erläutern.

Wenn man die Aufgabe in der beschriebenen Weise verstanden hat, sollte man sich für eine *Lösungsstrategie* entscheiden.
Erfahrungsgemäß neigen Schüler der Klassenstufen 5 und 6 mehr zum *Probieren* als zum *Folgern.* Schon in diesen Klassenstufen sollte man versuchen, ihnen ein *systematisches Probieren* unter Einsatz eines *Ordnungsprinzips* (lexikografisch, der Größe nach, u.Ä.) beizubringen. Das *systematische Erfassen aller Möglichkeiten* und das Erstellen einer *vollständigen Fallunterscheidung* wird bei den Aufgaben Z3 bis Z10 angewendet.
Auch in den Klassenstufen 6 und 7 gibt es noch Schüler, die Aufgaben durch *Probieren* lösen wollen, bei denen das *Folgern* angemessener ist. Sie sind nicht bereit, die angegebene Lösung durchzuarbeiten, um so das *Folgern* zu *lernen*. Es ist daher eine wichtige Aufgabe des Betreuers, die Schüler anzuhalten, auch dann die vorgeschlagene Lösung durchzuarbeiten, wenn sie glauben, die Aufgabe gelöst zu haben. Nur auf diese Weise können sie sich die Technik der Lösungsdarstellung aneignen.

Beim *Folgern aus gegebenen Bedingungen* ist es oft entscheidend, in welcher *Reihenfolge* man aus diesen Bedingungen folgert. Man sollte stets nach der vermutlich *„informativsten“ Bedingung* suchen, welche die Menge der potenziellen Lösungen am meisten einschränkt.
Dies ist bei den Aufgaben S6, S13, L1 - L10, L4, L5, L8 - 10, Z3 - Z7, Z8b, Z10, G1 und G4 - G7 der Fall.

Analog spielt beim *Folgern aus den Voraussetzungen* einer Beweisaufgabe die Reihenfolge der verwendeten Voraussetzungen oft eine Rolle.
Dies ist bei den Aufgaben Z14, Z15, Z19 und G11 - 17 der Fall.

Das Berechnen von Größen aus gegebenen Größen sowie das Folgern aus gegebenen Bedingungen oder Voraussetzungen fassen wir unter dem Begriff „*Vorwärtsarbeiten*“ zusammen. Diese Lösungsstrategie ist bei allen Aufgaben einsetzbar und wohl auch allen Aufgabenlösern bekannt.
Die *Teilzielfrage beim Vorwärtsarbeiten* lautet: Welche (*ableitbaren*) Teilziele kann man von den Startgrößen ausgehend unmittelbar erreichen? Begründe!
Die *Hilfsmittelfrage beim Vorwärtsarbeiten* lautet: „Mit welchem Hilfsmittel (Satz, Formel, Definition, Umformungsregel u.Ä.) kann man von den Startgrößen ausgehend Teilziele erreichen?

Ebenfalls bei allen Aufgaben einsetzbar aber keineswegs allen Aufgabenlösern bekannt ist die Lösungsstrategie *Rückwärtsarbeiten*.
Hier lautet die *Teilzielfrage*: Von welchem (*hinreichenden*) Teilziel aus kann man das Ziel unmittelbar erreichen? Begründe!
Die *Hilfsmittelfrage* lautet: Mit welchem Hilfsmittel könnte man das Ziel unmittelbar erreichen? Sie kann bei folgenden Aufgaben zum Ziel führen: G10, G12, G13, G16.
Das Rückwärtsarbeiten kann bei folgenden Aufgaben weiterhelfen: S5, Z15, Z16, Z20, G2 - G4, G7, G8 und G10 - G16.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Lösungsfindung sind *Tabellen*. In den „Regeln“ findet man Hinweise auf „Tabellen als Hilfsmittel *beim Lösen von Zuordnungsaufgaben*“ und „Tabellen als Hilfsmittel *beim Lösen von Sachaufgaben*“. Solche Tabellen können eine vollständige und korrekte Lösung durch Folgern nicht ersetzen, weil die erforderlichen Begründungen fehlen.

Beispiele hierfür findet man in den Aufgaben S3, S7, S9 - 12, L1, L3 - L5, L8, Z1, Z5 und Z19.
Tabellen können auch in der Lösungsdarstellung bei Einzigkeitsnachweisen verwendet werden, wenn es um das Festhalten des Resultats beim systematischen Ermitteln aller Möglichkeiten geht, sowie bei Existenznachweisen, wenn überprüft wird, ob die angegebenen Elemente tatsächlich alle gestellten Bedingungen erfüllen. Auf diese Weise kann man die Übersichtlichkeit und „Lesbarkeit" der Lösung erhöhen.
Beispiele hierfür findet man in den Aufgaben S1, S6, Z3, Z7, Z8 und Z10.

In den Aufgaben S5, S10 und S13 werden *Skizzen,* in den Aufgaben L2, L6 und L7 werden *Mengendiagramme* zur Veranschaulichung einer Situation eingesetzt.

In der Regel sollte man an den Anfang der Lösung einer geometrischen Aufgabe eine *Planfigur* stellen, weil dadurch die „Lesbarkeit" der Lösung stark erhöht wird. Dies sollte von den Schülern auch dann verlangt werden, wenn bereits in der Aufgabenstellung eine solche Planfigur gegeben ist.
Um das *geschickte* Anfertigen einer solchen Planfigur zu erleichtern, sollte man stets quadratisch kariertes Papier verwenden und die Schüler auffordern, Eckpunkte eines gegebenen n-Ecks und den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises stets in Gitterpunkte zu legen. Wenn man Strecken mit geradzahligen Kästchenlängen zeichnet, braucht man den Mittelpunkt einer solchen Strecke nicht zu konstruieren, sondern kann ihn durch Abzählen von Kästchenlängen ermitteln.

Das **Darstellen der Lösung** ist eine erlernbare Technik, die vielen Schülern jedoch recht schwer fällt. Ein sehr häufig auftretender Fehler besteht darin, dass nur die vom Start zum Ziel führenden Teilziele festgehalten werden (in der Form „Es gilt, es gilt, es gilt ... Damit ist bewiesen ..."). Hier ist nicht zu erkennen, aus welchen Startgrößen oder *hergeleiteten Teilzielen* ein *weiteres Teilziel* abgeleitet wird, und es wird auch vergessen, das *verwendete Hilfsmittel* anzugeben.
Ein sehr günstiges didaktisches Hilfsmittel sind hierbei dreispaltige *Lösungsschemata* oder *Beweisschemata,* bei denen äußerlich sichtbar wird, dass eine Lösung aus einer Folge begründeter Folgerungen der Form „Aus ... folgt ... weil ..." besteht.
Zu diesem Zweck werden die *gegebenen Bedingungen* mit (a), (b), ... bzw. die *Voraussetzungen* mit V_1, V_2, ... bezeichnet. Die abgeleiteten *Feststellungen* werden mit (1), (2), ... gekennzeichnet. Der 1. Spalte des Schemas kann dann entnommen werden, woraus jeweils gefolgert wird und bei welchen Schlussfolgerungen die gegebenen Bedingungen oder Voraussetzungen benötigt werden. Dies hat den Vorteil, dass man erkennen kann, wenn eine der Bedingungen oder Voraussetzungen nicht benötigt wird. Im Fall einer „überflüssigen" Bedingung muss man nachprüfen, ob sie nicht einer der restlichen Bedingungen widerspricht. Im Fall einer überflüssigen Voraussetzung hat man eine Verallgemeinerung des bewiesenen Satzes entdeckt.
Folgende Aufgaben dienen dazu, die Schüler mit dieser Problematik vertraut zu machen: L5, L8, Z6, Z8.
Anhand folgender Aufgaben kann man das Anfertigen solcher Schemata einführen und üben: S11, S12, L1, L4, L5, Z4, Z5, Z10, Z12 - Z17, Z19 - Z21, G1 - G5, G8 - G15.

Wenn ein Schüler erst einmal gelernt hat, eine Lösung in Form eines solchen Schemas festzuhalten, dann ist er in der Lage, den typischen Schülerfehler einer „unvollständigen" Lösung zu vermeiden. Der Übergang zu einer sprachlich gefälligeren Textform, wie sie z.B. in den veröffentlichten Lösungen zu den Aufgaben der MO verwendet wird, ist dann problemlos möglich.

Dies wird vor allem in den Lösungen zu folgenden Aufgaben demonstriert: L6 - L10, Z6 - Z9, G6, G7, G16, G17.
Im Unterschied zu den Beweisschemata wird man hier jedoch nicht jede abgeleitete Feststellung mit einer Nummer bezeichnen, sondern nur diejenigen, auf die später wieder zurückgegriffen wird. Dies wird in den Lösungen zu den Aufgaben G16 und G17 demonstriert.
Um es dem Schüler zu ermöglichen, diese Darstellungsform zu erlernen, wird die Bezeichnung der gegebenen Bedingungen (a), (b), ... bzw. der Voraussetzungen V_1, V_2, ... in der Aufgabe explizit angegeben. Vom Schüler wird lediglich verlangt, in Textform gegebene Bedingungen in die „Kurzform“ einer geeigneten *Zeichensprache* zu übersetzen. Es bedeutet eine deutliche Erhöhung des Schwierigkeitsgrades, wenn das *Einführen dieser Bezeichnungen* vom Schüler verlangt wird. Dies geschieht in den Aufgaben Z12 - Z21, G5 - G7 und G13 - G17.

Das **Vermitteln von Wissen**, das über den Unterrichtsstoff hinausgeht, ist bei uns kein Selbstzweck sondern nur ein Hilfsmittel zum Lösen problemhafter Aufgaben.
Dem Unterrichtsstoff wird mit einer Ausnahme nicht voraus gegriffen: Mit dem Lösen einfacher Gleichungen sollte man bereits nach der 3. Stufe der MO in Klasse 6 beginnen und zwar zusammen mit dem Lösen von Sachaufgaben. Dabei ist es erneut wichtig, dass der Betreuer den Schüler motiviert, die vorgeschlagenen Lösungen durchzuarbeiten.