Einige Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben

(1) Was ist *gegeben*, was ist *gesucht*? Führe günstige *Bezeichnungen* (z.B. *Variablen, Symbole*) ein!

(1.1) Lassen sich die gegebenen Bedingungen in Form von *Gleichungen* oder *Ungleichungen* festhalten? (Dies erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert das Folgern.)
[S1, S3, S4, S8 - S12, Z1, Z2, Z7, Z8, Z12 - Z15, G6]

(1.2) Lassen sich die gegebenen Zahlen oder Größen und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen in einer *Tabelle* übersichtlich festhalten?
[S3, S9 - S12, L1, L3 - L5, L8, Z1, Z3, Z5 - Z7, Z8, Z10]

(2) *Vorwärtsarbeiten:*
Betrachte das *Gegebene* (Größen, Bedingungen oder Voraussetzungen)!
Welche *Teilziele* lassen sich hieraus unmittelbar erreichen (berechnen, folgern)? Begründe!
[Diese Vorgehensweise ist bei allen Aufgaben anwendbar.]

(2.1) Auf welche *Hilfsmittel* (Sätze, Formeln, Definitionen) weisen die gegebenen Größen, Bedingungen oder Voraussetzungen hin?
[Diese Frage ist beim Lösen aller Aufgaben nützlich.]

(2.2) Mit welcher Bedingung / Voraussetzung sollte man beginnen, welche Bedingung / Voraussetzung sollte man im zweiten Schritt verwenden?
Was lässt sich nun aus den abgeleiteten und den gegebenen Bedingungen / Voraussetzungen folgern? Begründe!
[S6, S13, L1 - L10, Z3 - Z7, Z8b, Z10, Z14, Z15a, Z19, G1, G4 - G7, G11 - G17]

(3) *Rückwärtsarbeiten:*
Betrachte das *Ziel* (die gesuchte Größe, die Behauptung)!
Von welchem *Teilziel* (Größe; abgeleitete Feststellung) aus kann man das Ziel unmittelbar erreichen? Begründe!
[S5, Z15, Z16, Z20, G2 - G4, G7, G8 und G10 - G16]

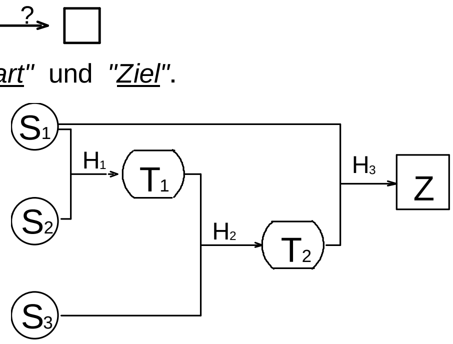
(3.1) Auf welche *Hilfsmittel* (Sätze, Formeln, Definitionen) weist die gesuchte Größe oder die Behauptung hin?
[G10, G12, G13, G16]

(4) *Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen:*
Ermittle zu jeder der gegebenen Bedingungen die Erfüllungsmenge und bilde den Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen.
[Z5]

(4.1) Die Elemente endlicher Erfüllungsmengen lassen sich durch *systematisches Erfassen aller möglichen Fälle* (systematisches Probieren) ermitteln. Verwende dabei ein *Ordnungsprinzip,* dessen Anwendung garantiert, dass tatsächlich alle möglichen Fälle erfasst werden [z.B. der Größe nach, lexikografisch (d.h. alphabetisch) u.ä.].
[Z5, Z7, Z8, Z9]

Die beiden jeweils durch zwei Impulse charakterisierten Vorgehensweisen (2) und (3) lassen sich wie folgt durch ein Merkschema festhalten: VA: $\bigcirc \xrightarrow{?}$? RA: ? $\xrightarrow{?} \square$

Teilzielfrage Eine jede *Aufgabe* enthält Informationen über *"Start"* und *"Ziel"*.
Eine Aufgabe lösen heißt, auf irgendeine Weise irgendeinen Weg vom Start zum Ziel zu finden.
Dieser Weg führt in der Regel über gewisse "*Teilziele*", die mit Hilfe gewisser *"Hilfsmittel"* erreicht werden.
In solchen Fällen lässt sich der Lösungsplan in Form eines *"Lösungsgraphen"* festhalten.
Die Belegung der Knoten und der Kanten eines solchen Graphen ist der nebenstehenden Skizze zu entnehmen.



Hinweis:
Nach den Regeln sind jeweils Aufgaben angegeben, bei deren Lösung die jeweilige Regel hilfreich sein kann. Dabei bezeichnet „S1“ die 1. Aufgabe aus der Aufgabengruppe „Sachaufgaben“. Die Aufgaben aus „Logik / Kombinatorik“ werden mit „L“, die Aufgaben aus „Zahlentheorie“ werden mit „Z“, und die Aufgaben aus „Geometrie“ werden mit „G“ bezeichnet.

Tabellen als Hilfsmittel beim Lösen von Zuordnungsaufgaben aus Logik / Kombinatorik

- Führe für die Elemente der Mengen, die einander zuzuordnen sind, *günstige Bezeichnungen* ein, z.B. M_1 = {a, b, c, d, e} und M_2 = {A, B, C, D, E}.
  - ° Wenn drei Mengen M_1, M_2 und M_3 gegeben sind, dann ist es günstig, für jedes der Paare [M_1, M_2], [M_1, M_3] und [M_2, M_3] eine Zuordnungstabelle anzufertigen.
- Wenn in der Aufgabenstellung die gegebenen Bedingungen nicht bereits als (1), (2), (3), ... oder (a), (b), (c), ... bezeichnet sind, dann führe solche *Bezeichnungen* ein.
- Fertige eine *Tabelle* an, in deren Zeilen- bzw. Spalteneingängen die einander zuzuordnenden Elemente stehen.
- Wenn aus einer Bedingung (*) folgt, dass eine Zuordnung (x, Y) gilt, dann trage in das zugehörige Feld der Tabelle ein „ +, (*)“ ein. Wenn jedoch folgt, dass diese Zuordnung nicht gelten kann, dann trage ein „ -, (*)“ ein.
- Wenn in einer Zeile oder Spalte in allen Feldern mit Ausnahme eines Feldes ein „-“ steht, dann trage in dieses Feld (als letzte verbleibende Möglichkeit) ein „+“ ein und gib dieser so ermittelten Zuordnung einen Namen (#). In die Felder der zugehörigen Spalte oder Zeile wird (da die gefundene Zuordnung eindeutig ist) ein „-, (#)“ eingetragen.
- Wenn die Aufgabe genau eine Lösung hat, dann kann man auf die angegebene Weise alle Felder der Tabelle füllen und hat so die Lösung gefunden.

[L1, L5, L6, L7, L8]

Hinweise:
In Abhängigkeit davon, aus welcher Bedingung man die erste Schussfolgerung zieht, kann man mit der beschriebenen Vorgehensweise verschiedene Lösungswege finden.
Nur bei sehr leichten Aufgaben gelingt es, bereits im ersten Durchlauf aus allen Bedingungen Folgerungen abzuleiten und so ans Ziel zu gelangen. In der Regel ist ein mehrfaches Durchlaufen erforderlich. Wenn man nicht weiterkommt, sollte man überprüfen, welche Bedingungen man bisher noch nicht verwendet hat und versuchen, aus dieser Bedingung Schlussfolgerungen zu ziehen.
Wenn man eine Lösung gefunden hat, ohne eine der gegebenen Bedingungen zu verwenden, dann muss man überprüfen, ob die gefundenen Lösung auch diese „überflüssige“ Bedingung erfüllt. Wenn dies nicht zutrifft, dann hat die Aufgabe keine Lösung.
Eine derartige Tabelle kann eine korrekte und vollständige Darstellung der Lösung nicht ersetzen, weil die erforderlichen Begründungen fehlen.

Tabellen als Hilfsmittel beim Lösen von Sachaufgaben

- Wofür benötige ich Zeilen, wofür Spalten?
  - ° Es müssen Felder entstehen, in die ich das Gegebene bzw. das Gesuchte eintragen kann.
  - ° In die <u>*Zeileneingänge*</u> schreibe ich die Objekte (Situationen), über die etwas ausgesagt wird.
  - ° In die <u>*Spalteneingänge*</u> trage ich die Größen (Merkmale) ein, über die etwas ausgesagt wird.
- Ich trage die *gegebenen Größen* in die betreffenden Felder ein; ich kennzeichne das (die) Feld(er), in denen das *Gesuchte* steht.
- Ich <u>*fülle*</u> weitere <u>*Felder der Tabelle*</u> aus, indem ich die aus der Aufgabenstellung hervorgehenden *Beziehungen* nutze.
  - ° Welches Feld lässt sich als erstes füllen? Begründe!
  - ° Welches Feld lässt sich als nächstes füllen? Begründe!
- Wenn es mir nicht gelingt, alle leeren Felder der Tabelle zu füllen, dann wähle ich eine *Variable*, trage sie in ein günstig gewähltes Feld ein und versuche wieder, die Felder der Tabelle zu füllen.
- Ich ermittle die <u>*Ansatzgleichung*</u>, indem ich eine noch nicht verwendete Beziehung nutze.
  - ° Ich untersuche, welche (spezielle oder allgemeine) Beziehung ich noch nicht verwendet habe, um die Felder der Tabelle zu füllen; diese Beziehung liefert mir die Ansatzgleichung.
- Ich löse die Ansatzgleichung und formuliere den Antwortsatz. Probe am Text durchführen!

[S11, S12, S13, S14]

***Skizzen** sind* heuristische *Hilfsmittel*, die sowohl dem Abspeichern von Aufgabenstellungen als auch dem Finden von Lösungswegen dienen können. Skizzen liefern darüber hinaus eine geometrische Veranschaulichung der Aufgabenstellung.
Beim Lösen von *„Bewegungsaufgaben“* können folgende **Regeln** nützlich sein:

- Welche Situation des Prozesses will ich durch eine Skizze erfassen?

- ◦ Ich zeichne für jeden entscheidenden Zeitpunkt eine *Teilskizze* und vermerke diesen Zeitpunkt.
- Was lässt sich in der Skizze festhalten?
  - ◦ Ich halte *Streckenlängen* und *Geschwindigkeiten* nebst Richtung (durch Pfeile) fest.
- Günstige *Bezeichnungen* einführen!
- Sind alle *gegebenen* und *gesuchten Größen* in der Skizze festgehalten?
  - ◦ Gegebene Bedingungen und Beziehungen, die sich auf diese Weise nicht festhalten lassen, notiere ich gesondert.

[S5, S7, S12, S13, S14]

Regeln zum Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben mit Hilfe der Methode der geometrischen Örter und der Methode der Hilfselemente

- Formuliere die Aufgabe so um, dass *nur Punkte* (und *Bedingungen*) *gegeben und* nur *Punkte gesucht* sind.
  Als gegebene Punkte eignen sich die Endpunkte einer Strecke, deren Länge bekannt ist.
  - ° Welches sind die beiden (grün zu kennzeichnenden) gegebenen Punkte, welches sind die (rot zu kennzeichnenden) gesuchten Punkte?
  - ° Welche der gegebenen Bedingungen liefert die gegebenen Punkte?
- Ermittle zu jedem gesuchten Punkt (möglichst) zwei *geometrische Örter*.
  - ° Welche der gegebenen Bedingungen liefert einen solchen geometrischen Ort?
  - ° Welche Bedingung wurde noch nicht verwendet? Sie könnte den zweiten gesuchten geometrischen Ort liefern.

Wenn du auf diese Weise nicht sofort ans Ziel gelangst, dann suche nach (konstruierbaren bzw. hinreichenden, blau zu kennzeichnenden) *Hilfspunkten*.

- VA: Welche Hilfspunkte lassen sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar konstruieren? Welches sind die benötigten beiden geometrischen Örter?
- RA: Aus welchen Hilfspunkten ließe sich der gesuchte Punkt unmittelbar konstruieren?
- Wenn eine Summe s oder eine Differenz d von zwei Streckenlängen gegeben ist, dann erzeuge durch Streckenabtragung einen Hilfspunkt, der Endpunkt einer Strecke ist, deren Länge gleich s bzw. d ist. (Dies ist ein *„nahe liegender“* Hilfspunkt.)
- Wähle Hilfspunkte stets so, dass eine Figur entsteht, über die „viel bekannt“ ist (gleichseitiges, gleichschenkliges oder rechtwinkliges Dreieck; Parallelogramm, Sehnenviereck, Tangentenviereck u.ä.).
- Welche („gestrichelt“ zu zeichnenden) *Hilfslinien* könnten nützlich sein, um eine derartige nützliche *Hilfsfigur* zu erzeugen?
- Welche *Hilfsmittel* (Sätze, Formeln, Definitionen u.ä.) könnten helfen, aus den gegebenen Größen (Streckenlängen, Winkelgrößen) oder aus den gegebenen Bedingungen weitere Größen oder Bedingungen abzuleiten, die bei der Suche nach geometrischen Örter helfen können?

Ein *Lösungsplan* ist gefunden, wenn man von den *gegebenen Punkten* über die *gefundenen Hilfspunkte* zu den *gesuchten Punkten* gelangen kann, wobei zu jedem konstruierten Punkt *zwei geometrische Örter* bekannt sind.

- Gib zu jedem Hilfspunkt durch eine *Zusatzvoraussetzung* an, wie er konstruiert werden soll.
- Nummeriere die Konstruktionsschritte durch und untersuche, ob bzw. unter welchen Bedingungen das erhaltene geometrische Objekt (bis auf Kongruenz) eindeutig konstruierbar ist.