Man kann zunächst nachweisen, dass $m < 7$ gelten muss, wenn $m \cdot z$ auch eine Zahl aus M sein soll.
Dann musst du nur noch nachweisen, dass auch für $m = 2, 3, ..., 6$ das Vielfache $m \cdot z$ niemals eine Zahl aus M sein kann. Dieser Nachweis ist z.B. erbracht, wenn in $m \cdot z$ stets eine der Ziffern 0 , 8 oder 9 vorkommt.

zu Aufgabe 460842b: Günstige *Bezeichnungen (Variable)* wählen! [Den Eckpunkten *A, B, ..., H* werden die Variablen *a, b, ..., h* zugeordnet, die jeweils mit den Zahlen 1, 2, ..., 8 belegt werden]
Was lässt sich aus den *gegebenen Bedingungen* unmittelbar *folgern*? [Gesamtsumme 36; Summe 18 auf jeder Würfelfläche]
Ermittle *systematisch alle Möglichkeiten*, die Zahl 18 in eine Summe von vier Summanden aus den acht gegebenen Zahlen zu zerlegen. Günstiges *Ordnungsprinzip*? [Summanden „vom größten zum kleinsten“ ordnen; es gibt vier Zerlegungen]
Die Schwierigkeit der Aufgabe besteht darin, eine günstige *vollständige Fallunterscheidung* zu finden, die es gestattet, die Anzahl aller zulässigen Möglichkeiten zu ermitteln. Folgende Idee führt zum Ziel: Zwei Eckpunkte eines Würfels können entweder eine Kante, eine Flächendiagonale oder eine Raumdiagonale begrenzen. Man ordnet in jedem dieser Fälle den beiden Endpunkten der Strecke zunächst eine der beiden größten Zahlen 8 bzw. 7 zu.

Weise nach, dass für eine *Kante* die Belegung ihrer Endpunkte mit 8 und 7 nicht zulässig ist!

Ermittle die Anzahl der Möglichkeiten, die Endpunkte einer *Flächendiagonale* mit den Zahlen 8 und 7 zu belegen!
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahl 8 einem Eckpunkt des Würfels zuzuordnen? [8 Möglichkeiten]
- Wie viele Möglichkeiten gibt es für $a = 8$, einen Eckpunkt mit der 7 zu belegen? [3 Möglichkeiten: $c = 7$, $f = 7$, $h = 7$]

Nun muss noch die Anzahl der Möglichkeiten ermittelt werden, die beiden restlichen Summanden 2 und 1 Eckpunkten des Würfels zuzuordnen. Ferner ist noch der Fall *„Raumdiagonale“* zu bearbeiten.

Beachte: Wenn es für eine erste Zahl x insgesamt m mögliche Zuordnungen und für eine zweite Zahl y insgesamt n mögliche Zuordnungen gibt, dann gibt es für das Zahlenpaar (x ; y) genau $m \cdot n$ mögliche Zuordnungen.

Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung
mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler

www.bezirkskomitee.de

Trainingsaufgaben für die Mathematik-Olympiade

für individuell betreute Schüler der Klassenstufe 8 zur Vorbereitung auf eine Teilnahme an der 4. Stufe der 51. Mathematik-Olympiade

Liebe Schülerin, lieber Schüler,
du gehörst zu den vier Delegierten oder Nachfolgekandidaten zum Landesseminar und hast die Chance, am Bundesfinale teilzunehmen. Daher erhältst du nochmals Trainingsaufgaben. Wir wünschen dir viel Erfolg!

Aufgaben-nummer		Aufgabe bearbeitet	Lösung besprochen	Notizen
410841	59%			
450841	58%			
430842	53%			
460841	46%			
400846	43%			
380844				
420842	30%			
410842	58%			
420845	56%			
430845	38%			
460842	24%			
390844				
460846	58%			
420846	48%			
480846				
430846	22%			
390842				
480843				
380845				
440843	46%			
490844	44%			
460843	43%			
410846	37%			
420843	35%			
430843	35%			
440846	21%			
400845	19%			

I. Vermischte Aufgaben

Aufgabe 410841 (59%)

In einem alten Lehrbuch wird in einer Aufgabe über folgenden Handel berichtet: Ein Bauer wollte bei einem Viehhändler mehrere Tiere kaufen. Der Viehhändler verlangte für jedes den gleichen Preis. Dem Bauern gelang es, diesen Preis um genau so viel Prozent des geforderten Preises herunterzuhandeln, wie er (in Groschen) betragen sollte. Er bezahlte jetzt 21 Groschen pro Tier. Bei dem ursprünglichen Preis hätte sein Geld für genau 3 Tiere gereicht. Jetzt konnte er mehr Tiere kaufen, wobei er sein Geld vollständig ausgab.

Wie hoch war der ursprüngliche Preis?

Wie viele Tiere konnte der Bauer für den neuen Preis insgesamt kaufen?

Weise durch eine Probe nach, dass der ermittelte Preis und die ermittelte Anzahl tatsächlich alle gegebenen Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 450841 (58%)

Löse folgende Aufgabe, die einem alten Rechenbuch entnommen wurde:

Von zwei Kapitalien trägt das eine 80 Gulden Jahreszins, das andere bei gleichem Zinssatz 100 Gulden Jahreszins. Wird nun das erste Kapital zu 3,5%, das zweite zu 3,75% ausgeliehen, so vermindert sich die ganze jährliche Einnahme um 16,25 Gulden.

Berechne die Kapitalien.

Aufgabe 460841 (46%)

In einer Zeitung war zu lesen:

„In unserer Stadt gab es bei der letzten Volkszählung 10% mehr Jungen als Mädchen und 15% mehr Frauen als Männer. Insgesamt wohnten damals in unserer Stadt weniger als 10 000 Einwohner, und dabei gab es 20% mehr Kinder und Jugendliche als Erwachsene.“

Ermittle alle Anzahlen von Frauen, Mädchen, Männern und Jungen, für die diese Angaben gelten.

Aufgabe 400845 (19%)

Es sei ABC ein Dreieck, in dem die Seite $\overline{AB}$ länger als die Seite $\overline{BC}$ ist. Die Größen der Innenwinkel bei A bzw. B seien wie üblich mit α bzw. β bezeichnet. Die Mittelsenkrechte m der Seite $\overline{AC}$ schneidet den Umkreis k des Dreiecks; derjenige Schnittpunkt, der auf derselben Seite der Geraden $\overline{AC}$ liegt wie der Punkt B, sei D genannt.

Es sei ferner E der Fußpunkt des Lotes von D auf die Gerade $\overline{AB}$.

a) Berechne die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABD in Abhängigkeit von α und β.

b) Beweise, dass für die Längen |AE|, |EB|, |BC| der Strecken $\overline{AE}$, $\overline{EB}$ bzw. $\overline{BC}$ die Gleichung |AE| = |EB| + |BC| gilt.

Hinweise zur Lösungsfindung

zu Aufgabe 460841: Die Formulierung „Ermittle alle Anzahlen ...“ weist darauf hin, dass außer dem *Einzigkeitsnachweis* (begründete Herleitung) auch ein *Existenznachweis* (Probe) erforderlich ist.

Günstige *Bezeichnungen (Variable)* wählen! [m , j , F , M]

Übersetze den Aufgabentext in die *Sprache der Gleichungen*! [4 Gleichungen]

Vereinfache die Gleichungen! [Man erhält $F = \frac{23 \cdot 7}{4 \cdot 43} \cdot m$]

Was folgt aus der Voraussetzung, dass m, j, F und M positive ganze Zahlen sind?

Ermittle systematisch *alle möglichen Fälle*!

zu Aufgabe 430846: Sei z eine beliebige Zahl aus der Menge M, also $m \cdot z$ das m-fache dieser Zahl.

Untersuche zunächst hinreichend viele *Spezialfälle*, um zu *Vermutungen* über allgemein auftretende *Gesetzmäßigkeiten* zu gelangen.

Aufgabe 420843 (35%)

a) Sei ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck, sei r die Länge des Inkreisradius dieses Dreiecks und gelte |BC| = a, |AC| = b und |AB| = c.

   Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $2 \cdot r = a + b - c$ folgt.

b) Sei h die Länge der Höhe $\overline{CD}$ dieses Dreiecks und seien r_1 und r_2 die Längen der Inkreisradien der Dreiecke ADC bzw. CDB.

   Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen stets $h = r + r_1 + r_2$ folgt.

Aufgabe 430843 (35%)

Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Von einem von den Eckpunkten A, B, C verschiedenen Punkt P wird gefordert:

(1) P liegt auf dem Umkreis des Dreiecks ABC.

(2) P liegt bezüglich der Geraden durch A und C in derjenigen Halbebene, in der B nicht liegt.

(3) Die Fußpunkte der Lote von P auf die Geraden BC, AC und AB seien in dieser Reihenfolge mit L, M bzw. N bezeichnet.

Leite aus diesen Voraussetzungen folgende Behauptungen her:

a) Die Winkel APC und NPL sind gleich groß.

b) Die Punkte L, M und N liegen auf ein und derselben Geraden.

Aufgabe 440846 (21%)

Von einem Dreieck ABC sei bekannt, dass die drei Höhenlängen die Maßzahlen 9, 29 und n haben, wobei n eine positive ganze Zahl bezeichnet.

Ermittle alle Zahlen n, für die ein derartiges Dreieck ABC existiert.

Aufgabe 430842 (53%)

Über eine Aluminiumkugel, eine Eisenkugel und eine Nickelkugel ist Folgendes bekannt:

(1) Die Masse der Eisen- und Nickelkugel beträgt zusammen 5,19 kg.

(2) Die Aluminium- und Eisenkugel haben zusammen ein Volumen von 900 cm^3.

(3) Die Nickelkugel hat einen Anteil an der Gesamtmasse aller drei Kugeln von 7,5 %.

Aluminium hat die Dichte 2,7 g/cm^3 und Eisen die Dichte 7,9 g/cm^3.
Das bedeutet: 1 cm^3 Aluminium hat die Masse 2,7 g, 1 cm^3 Eisen hat die Masse 7,9 g.

Berechne die Gesamtmasse aller drei Kugeln.
Wie viel Prozent der Gesamtmasse beträgt die Masse der Aluminiumkugel, wie viel Prozent die Masse der Eisenkugel?
Weise durch eine Probe nach, dass die ermittelten Resultate alle gestellten Bedingungen erfüllen

Aufgabe 400846 (43%)

Uwe ist ein passionierter Schwimmer. Da er an einem breiten Fluss wohnt, nutzt er diesen zum Training. Dabei geht er folgendermaßen vor: Unter der Oberbrücke begibt er sich mit einem Ball ins Wasser, überlässt den Ball der Strömung und schwimmt selbst gegen den Strom. Nach 20 Minuten wendet er, schwimmt seinem Ball hinterher und holt ihn unter der Unterbrücke ein.

Ermittle die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses, wenn bekannt ist, dass der Abstand zwischen beiden Brücken 2 km beträgt.

Bemerkung: Es wird angenommen, dass der Fluss stets mit gleich bleibender Geschwindigkeit fließt und auch den Ball stets mit dieser Geschwindigkeit mit sich führt. Ferner wird angenommen, dass Uwes Geschwindigkeit (größer als die Geschwindigkeit des Flusses) stets wie folgt beschrieben werden kann: Zu derjenigen Geschwindigkeit, die er in ruhendem Wasser erreichen würde, ist die Geschwindigkeit des Flusses zu addieren, wenn Uwe in Strömungsrichtung schwimmt; dagegen ist die Geschwindigkeit des Flusses zu subtrahieren, wenn Uwe gegen die Strömungsrichtung schwimmt.

Aufgabe 380844

Von dem englischen Physiker, Mathematiker und Astronomen Isaak Newton (1643 - 1727) stammt folgende Aufgabe:

„Ein Amtmann kauft Pferde und Ochsen für insgesamt 1770 Taler. Er zahlt für ein Pferd 31 Taler, für einen Ochsen aber 21 Taler. Wie viele Pferde und wie viele Ochsen können es hiernach gewesen sein?“

Ermittle alle Antworten auf diese Frage.

Aufgabe 420842 (30%)

Ein Schiff wird mithilfe von Kränen beladen. Zunächst werden vier Kräne mit gleicher Leistung eingesetzt. Nach zwei Stunden kann noch über zwei weitere Kräne mit einer kleineren Leistung verfügt werden. Mit allen sechs Kränen wird nun noch 3 Stunden gearbeitet, bis das Verladen abgeschlossen ist. Wenn alle Kräne von Anfang an zur Verfügung gestanden hätten, wäre die Arbeit schon nach insgesamt 4,5 Stunden beendet gewesen.

Berechne, wie lange ein Kran mit der größeren bzw. wie lange ein Kran mit der kleineren Leistung allein zum Beladen benötigt hätte.
Bestätige deine Angabe mit einer Probe.

II. Logik/Kombinatorik

Aufgabe 410842 (58%)

Gegeben sei eine rechteckige Tabelle mit drei Zeilen und vier Spalten, also mit 12 Feldern. In einem dieser Felder steht die Zahl Null.

Untersuche, ob es möglich ist, die übrigen 11 Felder dieser Tabelle so mit natürlichen Zahlen von 0 bis 9 zu belegen, dass die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) zugleich erfüllt sind:

(1) Jede dieser Zahlen kommt höchstens zweimal in der Tabelle vor.

(2) Die Summen der Zahlen in jeder der drei Zeilen sind gleich groß.

(3) Die Summen der Zahlen in jeder der vier Spalten sind gleich groß und größer als 15.

Aufgabe 460843 (43%)

Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruenten) Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) Die Strecke $\overline{BC}$ ist a cm lang.

(b) Die Strecke $\overline{BH_b}$ ist eine Höhe im Dreieck ABC und h_b cm lang.

(c) Die Strecke $\overline{CH_c}$ ist eine Höhe im Dreieck ABC und h_c cm lang.

Dabei bezeichnen also H_b und H_c die Fußpunkte der auf $\overline{AC}$ bzw. $\overline{AB}$ senkrecht stehenden Höhen. Außerdem gelte $h_b \geq h_c$.

a) Konstruiere für den Fall $a = 8$, $h_b = 7{,}5$ und $h_c = 4{,}5$ alle untereinander nicht kongruenten Dreiecke, die die Bedingungen (1) bis (3) erfüllen, und beschreibe deine Konstruktion.

b) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (1) bis (3) mit den in a) genannten Zahlenwerten erfüllt, dann lässt es sich wie beschrieben konstruieren.

c) Wie viele untereinander nicht kongruente Dreiecke ABC können für beliebig gewählte positive Zahlen a, h_b und h_c entstehen? Gib für jeden dieser möglichen Fälle an, welche Bedingungen a, h_b und h_c mit $h_b \geq h_c$ erfüllen müssen, damit dieser Fall eintritt.

Aufgabe 410846 (37%)

Es seien ABCD ein Parallelogramm, E ein Punkt auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus und F ein Punkt auf der Verlängerung von $\overline{AD}$ über D hinaus. Der Schnittpunkt von BF mit DE heiße G.

a) Untersuche, ob die Dreiecke BCF und CDE den gleichen Flächeninhalt haben.

b) Untersuche, ob die Vierecke ABGD und ECFG den gleichen Flächeninhalt haben.

Aufgabe 380845

Ermittle alle Zahlen n, die folgende Bedingungen (1) bis (4) gleichzeitig erfüllen:

(1) Es gibt zwei zweistellige Primzahlen p_1 und p_2 mit $p_1 < p_2$ und $n = p_1 \cdot p_2$.

(2) p_1 ist die Quersumme von n.

(3) Die Einerstellen von p_1 und p_2 sind einander gleich.

(4) $p_1 + 6$ und $p_1 - 6$ sind zweistellige Primzahlen.

IV. Geometrie

Aufgabe 440843 (46%)

a) Konstruiere ein konvexes Sechseck ABCDEF, das folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Gegenüberliegende Seiten sind stets parallel und haben denselben Abstand d = 8 cm.

(2) Die Winkel BAF und EDC sind rechte Winkel; die Größe des Winkels CBA beträgt 150°.

(3) Die Diagonalen $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ schneiden einander im Punkt S.

Beschreibe deine Konstruktion.

b) Ermittle in dem so konstruierten Sechseck die Größe des Winkels ESF.

Aufgabe 490844 (40%)

Es sei ABCD ein Quadrat und k der Kreis um den Mittelpunkt A durch den Punkt B . Von einem Punkt P wird gefordert, dass er im Inneren dieses Quadrates und auf dem Kreis k liegt. Durch P sei die Tangente t an k gelegt. Der Fußpunkt des Lotes von B auf t sei mit E und der Fußpunkt des Lotes von D auf t sei mit F bezeichnet.

Beweise: Die Summe der Streckenlängen $|DF|$, $|FE|$ und $|EB|$ ist gleich dem halben Umfang des Quadrates ABCD .

Aufgabe 420845 (56%)

Im Inneren eines Quadrates seien genau 187 Punkte markiert. Es sollen Dreiecke gezeichnet werden, die einander nicht überdecken und folgende Forderungen erfüllen:

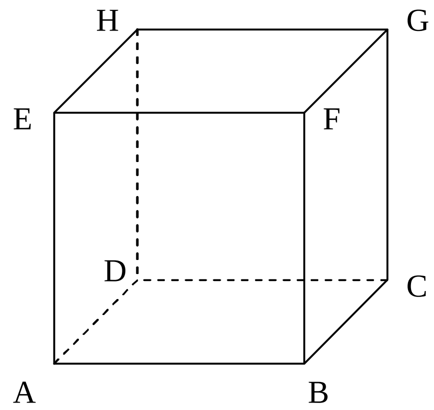
(1) Eckpunkte eines Dreiecks sind entweder markierte Punkte oder Eckpunkte des Quadrates.

(2) Mindestens ein Eckpunkt eines Dreiecks muss einer der markierten Punkte sein.

Wie viele Dreiecke lassen sich unter diesen Voraussetzungen höchstens bilden?

Aufgabe 460842 (24%)

Die Variablen A, B, C, D, E, F, G, H, die die Eckpunkte eines Würfels (siehe nebenstehende Abbildung) bezeichnen, sollen so durch jeweils eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 belegt werden, dass die Summen der Zahlen, die den vier Eckpunkten einer jeden Würfelfläche zugeordnet werden, untereinander gleich sind. Jede der genannten Zahlen soll dabei genau einmal verwendet werden.



a) Gib eine derartige Belegung an und weise nach, dass sie die gestellten Bedingungen erfüllt.

b) Ermittle die Anzahl aller voneinander verschiedenen Belegungen.

Aufgabe 430845 (38%)

In einem Land seien die gegenseitigen Entfernungen aller Städte verschieden groß. Eines Tages startet in jeder Stadt ein Flugzeug und fliegt nach der nächstgelegenen Stadt. Nach der Landung aller Flugzeuge stellt sich heraus, dass in keiner Stadt mehr als fünf Flugzeuge gelandet sind.

Zeige, dass dies kein Zufall ist.

Hinweis: Es ist zu beweisen, dass unter den genannten Voraussetzungen höchstens fünf Flugzeuge in derselben Stadt landen können.

Aufgabe 390844

Ina und ihr Mann hatten zwei Ehepaare zu einer Party eingeladen. Die anwesenden Personen machten folgende (wahre) Aussagen:

(1) Arne: Jeder der drei Männer ist 5 Jahre älter als seine Frau.
(2) Heike: Ich bin die älteste unter den drei Frauen.
(3) Bodo: Julia und ich sind zusammen 52 Jahre alt.
(4) Christian: Addiert man das Alter der sechs Anwesenden, so beträgt die Summe 151.
(5) Julia: Christian und ich sind zusammen 48 Jahre alt.
(6) Ina: Ist es nicht ein großer Zufall, dass wir alle im vorigen Monat Geburtstag hatten?

Zeige, dass die Aussagen (1) bis (6) ausreichen, um sowohl das Lebensalter (in ganzen Jahren) der sechs genannten Personen zu ermitteln als auch anzugeben, wer mit wem verheiratet ist.

III. Zahlentheorie

Aufgabe 420846 (48%)

Ermittle alle Zahlenpaare (m; n) mit $m; n \in N$, so dass gilt:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2003} \quad .$$

Aufgabe 480846

Ermittle alle geordnete Paare (a; b) positiver ganzer Zahlen, für die $a^2 + 3b$ und $b^2 + 3a$ Quadratzahlen sind.

Aufgabe 460846 (58%)

Beweise folgende Aussagen:

a) Die Zahl $x = (4!)\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$ ist durch 5 teilbar.

b) Die Zahl $y = (2006!)\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}\right)$ ist durch 2007 teilbar.

Hinweis: Es bezeichnet n! (gesprochen „n-Fakultät“) das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen, also $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.

Aufgabe 390842

Ermittle alle Paare (x; y) natürlicher Zahlen x und y mit folgenden Eigenschaften:

(1) x ist zweistellig.
(2) y ist vierstellig.
(3) Setzt man x vor y, dann ist die dadurch erhaltene sechsstellige Zahl dreimal so groß wie die Zahl, die man erhält, wenn man x hinter y schreibt.

Aufgabe 480843

Die Menge A besteht aus m unmittelbar aufeinander folgenden ganzen Zahlen, wobei m eine positive ganze Zahl ist. Die Summe der Elemente von A ist $2m$. Die Menge B besteht aus $2m$ unmittelbar aufeinander folgenden ganzen Zahlen. Die Summe der Elemente von B ist m. Die beiden größten Elemente der beiden Mengen unterscheiden sich dem Betrag nach um 99 .

Wie lauten die beiden Mengen?
Weise durch eine Probe nach, dass die beiden Mengen alle gestellten Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 430846 (22%)

Es sei M die Menge aller siebenstelligen natürlichen Zahlen, in deren Darstellung jede der Ziffern 1 bis 7 genau einmal vertreten ist.

Beweise, dass es in M keine zwei Zahlen gibt, von denen die eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist.