Einige mathematische und logische Grundlagen

Beim ***Lösen von Gleichungen*** mit Variablen durch ***Umformen*** besteht das Ziel darin, die Gleichung schrittweise zu vereinfachen, bis sie die Form $x = ...$ angenommen hat.
Um eine Gleichung zu *vereinfachen*, ist es gestattet
- auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl oder Variable zu addieren oder zu subtrahieren;
- beide Seiten der Gleichung mit derselben *von 0 verschiedenen* Zahl zu multiplizieren oder durch eine solche Zahl zu dividieren;
- auf jeder Seite das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ anzuwenden und zusammenzufassen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (x - 5) + 4 \cdot x &= 20 \\ 3 \cdot x - 15 + 4 \cdot x &= 20 \quad | +15 \\ 7 \cdot x &= 35 \quad | :7 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Gauß-Verfahren

Dieses *Verfahren zum Berechnen eines Summenwertes* ist bei allen Summen anwendbar, bei denen die Differenz aufeinander folgender Summanden konstant ist. Der Mathematiker nennt derartige Summen *„endliche arithmetische Reihen“*.

Bezeichnet a den ersten Summanden, d die konstante Differenz und n die Anzahl der Summanden, dann liefert dieses Verfahren folgende Formel:
$S = a + (a + d) + (a + 2 \cdot d) + (a + 3 \cdot d) + ... + [a + (n - 1) \cdot d)] = [2 \cdot a + (n - 1) \cdot d] \cdot n:2$.
Es wäre jedoch unangemessen, sich diese Formel einprägen zu wollen; viel einfacher ist es, sich das *Verfahren* einzuprägen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} s &= 13 + 18 + 23 + ... + 88 + 93 + 98 \qquad \text{(18 Summanden)} \\ \underline{s} &\underline{= 98 + 93 + 88 + ... + 23 + 18 + 13} \\ 2s &= 111 + 111 + 111 + ... + 111 + 111 + 111 \qquad \text{(18 Summanden)} \\ s &= \tfrac{1}{2} \cdot 111 \cdot 18 = 999 \end{aligned}$$

Leistungsaufgaben

Bezeichnet man mit A eine zu erledigende Arbeit, mit t_1 und t_2 die (z.B. in Stunden gemessene) Zeit, die jede von zwei Personen hierfür einzeln benötigt und mit t die Zeit, die sie zusammen benötigen, dann gilt die Gleichung $\frac{A}{t_1} + \frac{A}{t_2} = \frac{A}{t}$, die durch Division beider Seiten durch A zu $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t}$ vereinfacht werden kann. Dabei spielt es keine Rolle, ob A das Mähen einer Wiese, den Abtransport einer bestimmten Menge von Material, das Füllen eines Fasses mit Wasser u.ä. bedeutet.

Bemerkungen zum Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Vertauscht man die beiden Seiten der Gleichung, dann erkennt man, dass das Distributivgesetz auch zur *Umformung einer Summe in ein Produkt* durch *Ausklammern eines gemeinsamen Faktors* verwendet werden kann.

Durch zweifache Anwendung des Distributivgesetzes gelangt man zu einer *Regel für das Multiplizieren zweier Summen*:
$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$.
In Worten: *Zwei Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der ersten Summe mit jedem der Summanden der zweiten Summe multipliziert und diese Produkte addiert.*

Mengendiagramme

Wir führen folgende *Bezeichnungen* ein:

G: Anzahl der Elemente der „Gesamtmenge“

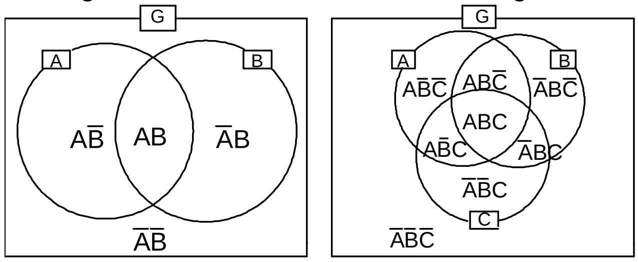
A: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a haben

AB: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a *und* auch die Eigenschaft b haben

$A\overline{B}$: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a haben *und* die Eigenschaft b *nicht* haben

$\overline{A}\,\overline{B}$: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a *nicht* haben *und* auch die Eigenschaft b *nicht* haben.

Kommen mehr als zwei Eigenschaften vor, dann wird analog bezeichnet.



Zum Beweisen von Sätzen aus der Teilbarkeitslehre

Beim Beweisen von Sätzen ist es oft nützlich, Aussagen aus der „Wortsprache“ in die „Zeichensprache“ zu übersetzen.

Für „ x ist eine natürliche Zahl “ schreibt man „ $x \in N$ “.
Für „ a ist ein Teiler von b “ schreibt man „ $a|b$ “.

Einige weitere Beispiele werden in folgender Tabelle angegeben:

Wortsprache	Zeichensprache
x ist eine gerade Zahl	$x = 2\cdot n$ mit $n \in N$
y ist eine ungerade Zahl	$y = 2\cdot n + 1$
s ist die Summe von drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen	$s = (2\cdot n+1) + (2\cdot n+3) + (2\cdot n+5)$
p ist das Produkt aus zwei ungeraden Zahlen	$p = (2\cdot n + 1)\cdot(2\cdot m + 1)$ mit $m \in N$
a lässt bei Division durch b den Rest r	$a = b\cdot q + r$ mit $q \in N$
(a ist ein Teiler von b) oder (b ist ein Vielfaches von a)	$b = q\cdot a$

Es gilt der folgende *Satz über die Division natürlicher Zahlen mit Rest*:
Zu jeder Zahl a (als Dividenden) und jeder von 0 verschiedenen Zahl m (als Divisor) gibt es stets genau eine Zahl q (als Quotienten) und eine Zahl r (als Rest), für die folgende Gleichung gilt:

$$a = m\cdot q + r \quad \text{mit} \quad 0 \le r \le m - 1.$$

Das Beweisen von mathematischen Sätzen

Wahre mathematische Aussagen nennt man Lehrsätze oder kurz *Sätze.*
Jeder mathematische Satz enthält *Voraussetzungen* $V_1, V_2, \dots, V_n$ und eine *Behauptung* (B) und lässt sich in der „Wenn-dann-Form“ formulieren:

Wenn V_1 und V_2 und ... und V_n gilt, *dann* gilt auch (B).

Ein *Beweis* ist erbracht, wenn man von den *Voraussetzungen* oder *allgemeingültigen Aussagen* ausgehend in endlich vielen Schritten über *abgeleitete Feststellungen* zur *Behauptung* gelangt, wobei jeder Beweisschritt durch die Angabe des verwendeten *Beweismittels* (Satz, Formel, Umformungsregel, Definition o.ä.) begründet werden muss.

Satz: Das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist stets gerade.
V_1: x ist gerade; V_2: y ist ungerade; (B): $x \cdot y$ ist gerade.
Beweis:

Aus	V_1	folgt (1)	$x = 2 \cdot m$ mit $m \in N$;	[nach Definition].
Aus	V_2	folgt (2)	$y = 2 \cdot n + 1$ mit $n \in N$;	[nach Definition].
Aus	(1) und (2)	folgt (3)	$x \cdot y = 2 \cdot m \cdot (2 \cdot n + 1)$;	[Einsetzen].
Aus	(3)	folgt (4)	$x \cdot y = 2 \cdot (2 \cdot m \cdot n + m)$;	[Distributivgesetz].
Aus	(4)	folgt (5)	$x \cdot y = 2 \cdot k$ mit $k \in N$;	[Summen und Produkte von natürlichen Zahlen sind stets auch natürliche Zahlen].
Aus	(5)	folgt (B)	$x \cdot y$ ist gerade;	[Definition].

Aufgabentypen / Lösungsgraphen

Eine jede (auch nichtmathematische) Aufgabenstellung enthält Informationen über den *„Start"*, das *„Ziel"* und u.U. auch über zulässige *„Hilfsmittel".*
Eine Aufgabe lösen heißt, einen Weg vom Start zum Ziel zu finden. Dies geschieht in der Regel über das Erreichen gewisser *„Teilziele".*
Diese Begriffe ermöglichen folgende zweckmäßige Einteilung *mathematischer Aufgaben* in drei *Aufgabentypen*:

	Bestimmungsaufgaben		
	Typ 1 (Grundtyp)	Typ 2	Beweisaufgaben
Start	Gegebene Bedingungen	Gegebene Größen (und Bedingungen)	Voraussetzungen
Ziel	Alle Elemente, die diese Bedingungen erfüllen	Gesuchte Größe(n)	Behauptung

Zum Grundtyp der Bestimmungsaufgaben gehören viele zahlentheoretische Bestimmungsaufgaben und auch die Konstruktionsaufgaben.
Zum Typ 2 der Bestimmungsaufgaben gehören die so genannten *Sachaufgaben.*

Der *Lösungsplan* zu einer Aufgabe lässt sich stets durch einen *Lösungsgraphen* festhalten. In dessen Eingangsknoten stehen die Start(größen), im Endknoten das Ziel und in den restlichen Knoten die Teilziele.
Zu dem oben angegebenen Beweis des Satzes über das Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl gehört der nebenstehende Lösungsgraph. Die Kanten des Graphen werden mit den verwendeten Beweismitteln (Definitionen, Sätzen u.ä.) belegt.

$$\left.\begin{matrix} V_1 \rightarrow (1) \\ V_2 \rightarrow (2) \end{matrix}\right\} \rightarrow (3) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (B)$$

Hinweise auf einige logische Grundlagen:

Wenn gefordert wird, dass „alle Elemente zu ermitteln sind, die gegebene Bedingungen erfüllen", dann sind außer der Angabe der gesuchten Elemente stets zwei Sätze zu beweisen:

I. Wenn ein Element alle gegebenen Bedingungen erfüllt, dann gehört es zu der angegebenen Lösungsmenge (d.h. es kann keine weiteren Lösungen geben).
[*Einzigkeitsnachweis* oder *Herleitung*]

II. Jedes Element der angegebenen Lösungsmenge erfüllt tatsächlich alle gegebenen Bedingungen.
[*Existenznachweis* oder *Probe*]

Diese beiden Sätze sind immer dann zu beweisen, wenn dem Aufgabentext nicht zu entnehmen ist, dass die Bestimmungsaufgabe genau eine Lösung hat.
Dies ist der Fall, wenn der Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit verlangt wird oder wenn untersucht werden soll, ob die Aufgabe eindeutig lösbar ist.

Einer Herleitung (Einzigkeitsnachweis) ist in der Regel nicht zu entnehmen, ob alle gegebenen Bedingungen tatsächlich verwendet wurden oder ob auch „überflüssige“ Bedingungen vorkommen. Aufgaben, bei denen dies der Fall ist, nennt man „*überbestimmt*“.
Eine in der Herleitung nicht verwendete Bedingung kann mit den restlichen Bedingungen verträglich sein, sie kann aber auch einer dieser Bedingungen widersprechen. In diesem Fall hätte die Aufgabe keine Lösung.
Dies erklärt die logische *Notwendigkeit einer Probe* (Existenznachweis) und macht auch klar, dass stets eine *Probe am Aufgabentext* und nicht etwa nur für die Ansatzgleichung erforderlich ist.

Wenn dem Aufgabentext zu entnehmen ist, dass die Aufgabe *genau eine Lösung* hat, dann reicht eine korrekte Herleitung nebst Angabe des Resultats als korrekte Lösung aus. Aus logischer Sicht kann auf eine Probe verzichtet werden.
Um Fehler (z.B. Rechenfehler) in der Herleitung zu entdecken, ist es jedoch stets ratsam, trotzdem eine Probe durchzuführen.
Aus logischer Sicht wäre bei einer derartigen Aufgabe eine Lösung auch dann korrekt, wenn nur das Resultat angegeben und eine Probe durchgeführt wird.
Bei Aufgaben der Mathematik-Olympiade wird jedoch stets eine Herleitung verlangt.
