Aufgabe 460845: Die Voraussetzung „nicht rechtwinkliges Dreieck“ weist darauf hin, dass außer dem Fall „spitzwinklig“ auch der Fall „stumpfwinklig“ zu untersuchen ist, wobei noch zu unterscheiden ist, ob der stumpfe Winkel ein Basiswinkel oder der Winkel an der Spitze ist.

Naheliegende *Hilfspunkte*? [Die Tangentenschnittpunkte *E* und *F*]

Vermutungen aus *Planfigur?* [D ist der Mittelpunkt des Durchmessers $\overline{B'A'}$ und $\overline{DB'}$, $\overline{DA}$, $\overline{DB}$ und $\overline{DA'}$ sind Radien des gesuchten Kreises, also sind die Dreiecke *AB'D*, *BAD* und *A'BD* gleichschenklig]

Vorwärtsarbeiten führt zu $\overline{DA} = \overline{DB}$ (als Tangentenabschnitte) und zur Gleichheit einiger Winkel (Wechselwinkelsatz, Scheitelwinkelsatz).

Hilfsmittelfrage beim Rückwärtsarbeiten: In welchen Sätzen kommt das hinreichende Teilziel „Gleichschenkligkeit“ vor? [Umkehrung des Basiswinkelsatzes]

Aufgabe 400842: Die *Hilfsmittelfrage beim VA* führt zu den Sätzen über den Inkreismittelpunkt, die Berührungsradien und die Tangentenabschnitte.

Nützliche Hilfselemente? [Inkreismittelpunkt *M*; Berührungspunkte *D, E* von Kreis und Tangenten; Berührungsradien; Länge der Tangentenabschnitte $|AF| = p$, $|BD| = m$, $|CE| = n$]

Vorwärtsarbeiten führt zu den Gleichungen $a = m + n$, $b = n + p$, $c = p + m$.

Rückwärtsarbeiten führt zu der Idee, den Term $(b + c - a)$ durch m, n, p auszudrücken.

Aufgabe 450846b: Günstige *Hilfselemente*? [Lotfußpunkte *P'* und *P“*; Lote $\overline{PP'}$ und $\overline{PP''}$; Hilfsstrecke $\overline{OP}$]

Um dich von der *Allgemeingültigkeit* der Aussage für beliebige P auf dem Kreisbogen zu überzeugen, fertige für (mindestens) zwei *konkrete Fälle* eine genaue Planfigur an; betrachte auch einen *Grenzfall*.

Vorwärtsarbeiten: Was folgt für das Viereck *OP'PP“* aus den Voraussetzungen? [Zwei Gegenwinkel sind rechte Winkel, also Sehnenviereck; Mittelpunkt *M* des Durchmessers ist Mittelpunkt des Umkreises; Radien $\overline{MP'}$ und $\overline{MP''}$ günstige Hilfsstrecken; in den konkreten Fällen (und auch im Grenzfall *P = A = P'*) sind die Dreiecke *P'P“M* kongruent; $\angle P'MP''$ ist der zum Peripheriewinkel *P'OP“* gehörende Zentriwinkel]

Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler

www.bezirkskomitee.de

Trainingsaufgaben für die Mathematik-Olympiade

für individuell betreute Schüler der Klassenstufe 7 zur Vorbereitung auf eine Teilnahme am Landesseminar für Schüler der Klasse 8 im Schuljahr 2012 /13

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

du gehörst zu den 10 erfolgreichsten Startern bei der 3. Stufe der 51. MO in der Olympiadeklasse 7. Daher erhältst du eine Auswahl von Aufgaben, die in den vergangenen Jahren in der 4. Stufe der Mathematik-Olympiade in der Klassenstufe 8 gestellt wurden. Wenn du dich mit diesen Aufgaben beschäftigst, steigen deine Chancen, im nächsten Schuljahr in der 3. Stufe der MO so gut abzuschneiden, dass du die Delegierung zum Landesseminar schaffst.

Die beiliegenden Aufgaben sind in 4 Gruppen eingeteilt (Vermischte Aufgaben, Logik/Kombinatorik, Zahlentheorie, Geometrie). Die jeweils hinter der Aufgabennummer angegebene Prozentzahl zeigt (sofern bekannt) an, welchen Anteil der insgesamt bei dieser Aufgabe erreichbaren Punkte von den Startern des jeweiligen Olympiadejahrgangs bei der 4. Stufe der MO tatsächlich erreicht wurde.

Empfehlungen für ein erfolgreiches Training:

Teile dir die Arbeit in Etappen ein und wähle für jede Etappe Aufgaben aus allen vier Themengebieten aus. Lass dich dabei von deinem Betreuer beraten. Dein Betreuer erhält neben den Aufgaben auch die Lösungen. Nach dem Besprechen einer Aufgabe wird er dir eine Kopie der zugehörigen Lösung geben. Er wird dir mitteilen, zu welchen Aufgaben du eine schriftliche Lösung anfertigen sollst, damit er erkennen kann, bis zu welchem Grad du die Technik des Darstellens einer Lösung beherrschst. Bei allen anderen Aufgaben reicht es aus, wenn du dir Notizen zu dem von dir gefundenen Lösungsweg machst. Wenn du trotz Anstrengung keinen Lösungsweg findest, dann notiere dir die gescheiterten Lösungsversuche. Dein Betreuer wird dir in der Besprechung dann entsprechende Tipps geben.

Damit du den Überblick über die bereits bearbeiteten Aufgaben behältst, kannst du in der Übersicht immer ankreuzen, welche Aufgabe du schon bearbeitet hast und welche Lösungen bereits besprochen wurden.

Wir wünschen dir beim Rechnen und Knobeln viel Erfolg und Freude!

Aufgaben-nummer		Aufgabe bearbeitet	Lösung besprochen	Notizen
440845	89%			
450844	75%			
490841	87%			
420841	75%			
450843	70%			
430841	65%			
440841	64%			
390845	57%			
470841				
410844	88%			
400843	76%			
400844	73%			
460844	70%			
440842	69%			
410845	72%			
450842	68%			
440844	67%			
450845	62%			
420844	83%			
430844	67%			
410843	67%			
460845	57%			
400842	56%			
450846	56%			
490844				
470842				

Aufgabe 470842

Es sei ABCD ein konvexes Viereck, dessen Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ einander in einem Punkt S schneiden. Es sei E derjenige Punkt, der auf derselben Seite der Geraden AB liegt wie die Punkte C und D und für den ABE ein gleichseitiges Dreieck ist. Ferner gelte:

(1) Die Größe des Winkels CBD beträgt 10°.
(2) Die Größe des Winkels CAD beträgt 20°.
(3) Die Größe des Winkels DBA beträgt 40°.
(4) Die Größe des Winkels BAC beträgt 50°.

a) Berechne die Größe des Winkels AEC.

b) Berechne die Größen der Innenwinkel des Vierecks ABCD.

Hinweise zur Lösungsfindung

Aufgabe 420844: Naheliegende *Hilfslinien*? [Radien $\overline{AM}$ und $\overline{BM}$]

Welche *Vermutungen* lassen sich einer genau gezeichneten *Planfigur* entnehmen? [Kongruenz der Dreiecke *ASD* und *BSC*; Gleichschenkligkeit der Dreiecke *ABS* und *DAM*]

Hilfsmittelfrage beim Vorwärtsarbeiten: In welchen Sätzen kommen die gegebenen Voraussetzungen vor? [Sätze über Winkel im Kreis: Peripheriewinkelsatz, Peripheriezentriwinkelsatz. Sätze über Dreiecke: Basiswinkelsatz, Innenwinkelsatz, Außenwinkelsatz]

Rückwärtsarbeiten: Woraus lässt sich φ unmittelbar berechnen? [Aus dem Zentriwinkel *DMA*, da das Dreieck *DMA* gleichschenklig ist.] Woraus lässt sich Winkel *DMA* berechnen? [Aus dem Peripheriewinkel *DAB*]

Aufgabe 410843: Der Aufgabenstellung ist zu entnehmen, das hier der Satz des Pythagoras (nicht verwendet werden darf, sondern) zu beweisen ist.

Die Behauptung legt die Anwendung der *Hilfsmittel* „Flächenzerlegung, Flächenvergleich, Inhaltsformeln“ nahe. Es ist leicht zu erkennen, dass das Sechseck *ABGHIK* den Inhalt $(a^2 + b^2 + 2\cdot\frac{1}{2}ab)$ und dass das Sechseck *ADEFBC* den Inhalt $(c^2 + 2\cdot\frac{1}{2}ab)$ hat. Folglich muss man nur zeigen, dass diese Sechsecke kongruent und daher inhaltsgleich sind.

Aufgabe 400842 (56%)

Es sei ABC ein Dreieck; die Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ seien wie üblich mit a, b, c und die Größe des Winkels BAC mit α bezeichnet. Ferner sei r die Radiuslänge des Inkreises und F der Berührungspunkt des Inkreises mit AB.

Es ist zu beweisen, dass für alle Dreiecke ABC, die den gleichen Winkel BAC und den gleichen Inkreisradius haben, die Summe (b + c − a) konstant ist und dass $\left(\frac{b+c-a}{2}\right)$ die Länge der Strecke $\overline{AF}$ ist.

Aufgabe 450846 (56%)

Gegeben sei ein Kreissektor, der von zwei Radien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ sowie dem Bogen *AB* begrenzt wird.

a) Es werde vorausgesetzt, dass die Radien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ aufeinander senkrecht stehen. Von einem beliebigen Punkt *P* des Kreisbogens *AB* werden die Lote auf $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ gezeichnet.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Verbindungsstrecken der Lotfußpunkte für alle Punkte *P* des Kreisbogens gleich lang sind und ermittle deren Länge.

b) Beweise: Auch unter der Voraussetzung, dass die Radien $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ einen spitzen Winkel einschließen, sind die Verbindungsstrecken der Lotfußpunkte für alle Punkte *P* des Kreisbogens gleich lang.

Aufgabe 490844 (40%)

Es sei ABCD ein Quadrat und k der Kreis um den Mittelpunkt A durch den Punkt B. Von einem Punkt P wird gefordert, dass er im Inneren dieses Quadrates und auf dem Kreis k liegt. Durch P sei die Tangente t an den Kreis k gelegt. Der Fußpunkt des Lotes von D auf t sei mit F bezeichnet.

Beweise: Die Summe der Streckenlängen |DF|, |FE| und |EB| ist gleich dem halben Umfang des Quadrates ABCD.

I. Vermischte Aufgaben

Aufgabe 440845 (89%)

Paul und Paula stehen auf dem Bahnhof nebeneinander an der Bahnsteigkante. Ein Güterzug fährt langsam mit gleichmäßiger Geschwindigkeit vorbei. Die beiden wollen eine Methode ausprobieren, wie man die Länge des Zuges ermitteln kann, ohne ihn auszumessen:

In dem Augenblick, in dem der Anfang des Zuges (die Lokomotive) an ihnen vorbeifährt, gehen beide los, beide gleich schnell und mit gleichmäßiger Geschwindigkeit. Paula geht in derselben Richtung, in der der Zug fährt, Paul geht in entgegen gesetzter Richtung. Beide bleiben stehen, wenn das Zugende an ihnen vorbei fährt.

Paul stellt fest, dass er 30 Meter gegangen ist. Paula ist 40 Meter gegangen, als das Zugende an ihr vorbeifährt.

Wie lang ist der Güterzug?

Aufgabe 450844 (75%)

Wir betrachten Quadrate, die in neun kleinere, untereinander kongruente Quadrate unterteilt sind. In diese Quadrate werden die natürlichen Zahlen von 1 bis 9 eingetragen, zum Beispiel wie in Abbildung A450844 a.

In derartige Quadrate lassen sich auf verschiedene Weise (2 x 2)-Quadrate einzeichnen, zum Beispiel wie in Abbildung A450844 b. Nun bilde man die Summe *S* der dort eingetragenen vier Zahlen. In unserem Beispiel erhält man $S = 2 + 9 + 5 + 4 = 20$.

Zeige, dass es unter den (2 x 2)-Quadraten unabhängig davon, wie man die neun Zahlen anfangs eingetragen hat, stets eines gibt, dessen Summe *S* größer oder gleich 16 ist.

1	**7**	**8**
2	**9**	**3**
5	**4**	**6**

Abbildung A450844 a

1	**7**	**8**
2	**9**	**3**
5	**4**	**6**

Abbildung A450844 b

Aufgabe 490841 (87%)

In drei Gefäßen ist jeweils eine unbekannte Menge Wasser. Man gießt ein Drittel des Wassers aus dem ersten Gefäß in das zweite. Anschließend gießt man ein Viertel des Wassers, das jetzt in dem zweiten Gefäß ist, in das dritte. Schließlich gießt man ein Zehntel des Wassers aus dem dritten Gefäß in das erste. Jetzt befinden sich in jedem Gefäß 9 Liter Wasser, ohne dass dabei Wasser verloren ging.

Ermittle, wie viel Wasser sich in jedem der drei Gefäße befand, bevor umgegossen wurde.

Aufgabe 420841 (75%)

Vom byzantinischen Mathematiker Maximos Planudes von Nikomedia, der im 13. Jahrhundert lebte und Bücher über Arithmetik schrieb, stammt die folgende Aufgabe:

Ein sterbender Vater teilte sein Geldvermögen, das aus lauter gleichartigen Goldmünzen bestand, zu gleichen Teilen unter seinen Söhnen auf und gab dem ersten Sohn eine Münze und ein Siebentel des restlichen Geldes, dem zweiten zwei Münzen und ein Siebentel des nun noch verbliebenen Restes, dem dritten drei Münzen und ein Siebentel des nun noch verbliebenen Restes usw. Es gelang ihm, auf diese Weise die Münzen restlos zu verteilen.

Stelle fest, wie viele Söhne er gehabt und wie viele Münzen er besessen hat. Zeige durch eine Probe, dass deine Ergebnisse stimmen.

Aufgabe 430841 (65%)

An einem heißen Sommertag tranken vier Ehepaare, die gemeinsam einen Ausflug gemacht hatten, insgesamt 32 Gläser Limonade.

Herr Weber trank ein Glas, Herr Kühne zwei Gläser, Herr Dommer drei Gläser und Herr Simon vier Gläser. Frau Anna trank ebenso viel wie ihr Mann, Frau Marie doppelt so viel wie ihr Mann, Frau Helene dreimal so viel wie ihr Mann und Frau Sophie viermal so viel wie ihr Mann.

Es sind die Familiennamen von Anna, Maria, Helene und Sophie zu ermitteln und es ist nachzuweisen, dass dies eindeutig möglich ist.

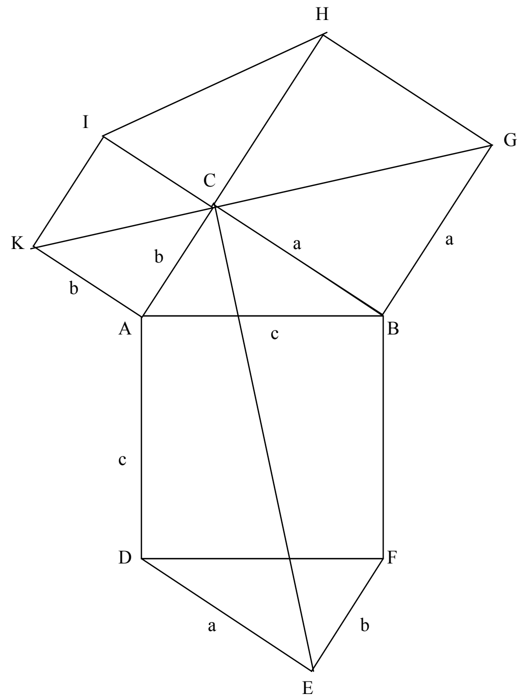
Aufgabe 410843 (67%)

Untenstehende Abbildung zeigt ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Über den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ sind die Quadrate ADFB bzw. BGHC bzw. ACIK so gezeichnet, dass sie das Dreieck ABC nicht überdecken. Außerdem wurde dem Quadrat ADFB an der Seite $\overline{DF}$ ein zu ABC kongruentes Dreieck DEF so angefügt, dass die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{EF}$ gleich lang sind.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen der Punkt C auf der Geraden KG liegt!

b) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Vierecke CEFB und GKAB kongruent sind!

c) Wie üblich seien die Längen der Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ mit a, b bzw. c bezeichnet. Beweise mithilfe der in b) nachgewiesenen Kongruenz, dass die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.



IV. Geometrie

Aufgabe 420844 (83%)

Sei ABCD ein Viereck mit dem Diagonalenschnittpunkt S, dessen Eckpunkte auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M liegen und dessen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ die gleiche Länge a besitzen.

a) Ermittle allgemein die Winkelgröße φ des Winkels ADM in Abhängigkeit von der Winkelgröße σ des Winkels BSC.

b) Beweise, dass die Punkte A, M, S und D unter den genannten Voraussetzungen stets auf ein und demselben Kreis liegen.

Aufgabe 430844 (67%)

Es sei ABCD ein Viereck, das folgende Voraussetzungen erfüllt:

(1) ABCD ist ein Rhombus mit der Seitenlänge a.

(2) Der Winkel BAD hat die Größe 60°.

(3) Auf der Strecke $\overline{CD}$ liegt ein Punkt E und auf der Strecke $\overline{AD}$ ein Punkt F derart, dass die Strecken $\overline{DE}$ und $\overline{AF}$ gleich lang sind.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BEF gleichseitig ist.

Aufgabe 460845 (57%)

Es seien ABC ein nicht rechtwinkliges Dreieck und k sein Umkreis. Es sei D der Schnittpunkt der Tangente t_A an den Kreis k im Punkt A mit der Tangente t_B an k in B. Die Parallele t'_C zur Tangente t_C an den Kreis k im Punkt C durch den Punkt D schneide die Gerade durch die Punkte A und C im Punkt B_0 und die Gerade durch B und C im Punkt A_0.

Beweise, dass es unter diesen Voraussetzungen einen Kreis gibt, der durch A, B, A_0 und B_0 geht.

Aufgabe 450843 (70%)

In einem ebenen Punktegitter (gemeint sind alle Punkte in einem Koordinatensystem mit ganzzahligen Koordinaten) wird schrittweise ein Punktmuster aufgebaut:

1. Schritt:
Ein beliebiger Punkt wird ausgewählt. Wir beschreiben die Anzahl der im 1. Schritt $A(1)$ festgelegten Punkte mit der Gleichung $A(1) = 1$.

2. Schritt:
Zu diesem Punkt fügen wir genau diejenigen vier Gitterpunkte hinzu, die zum ersten Punkt den Abstand 1 haben. Folglich gilt $A(2) = 1 + 4 = 5$.

3. Schritt:
Nun fügen wir zu diesen fünf Punkten genau diejenigen acht Gitterpunkte hinzu, die den Abstand 1 haben und bisher noch nicht im Muster erfasst sind. Folglich gilt $A(3) = 5 + 8 = 13$.

a) Berechne in der angegebenen Weise die Anzahl $A(7)$ der Punkte, die das Punktmuster nach Ausführung des 7. Schrittes hat.

b) Philipp will wissen, wie viele Punkte nach dem 2006. Schritt auf die angegebene Weise erfasst sind. Leite eine geeignete Formel her und berechne mit deren Hilfe $A(2006)$.

c) Betrachte nun dieses Muster im Raum, wobei $B(1) = 1$ bedeutet, dass im 1. Schritt ein beliebiger Punkt ausgewählt wurde. Ermittle die Anzahlen $B(2)$ und $B(3)$ dieses räumlichen Punktmusters.

d) Gib eine Beziehung an, die es gestattet, die Anzahl $B(n)$ aus den bereits ermittelten Anzahlen $A(n)$ zu berechnen und berechne mit deren Hilfe $B(6)$. (Eine Herleitung oder ein Beweis wird in dieser Teilaufgabe nicht verlangt.)

Aufgabe 440841 (64%)

Ein M-athlon ist ein Leichtathletikwettbewerb mit M verschiedenen Disziplinen. Es werden jeweils für den ersten Platz p_1 Punkte, für den zweiten Platz p_2 Punkte und für den dritten Platz p_3 Punkte vergeben. Für die erteilten Punkte gilt: p_1, p_2, p_3 sind positive ganze Zahlen mit $p_1 > p_2 > p_3$.

An einem M-athlon nehmen genau die drei Athleten A, B und C teil. Am Ende des Wettbewerbes hat Teilnehmer A 22 Punkte erzielt, B und C dagegen erreichten nur je 9 Punkte. Teilnehmer B war jedoch Sieger beim 100-Meter-Lauf.

Weise nach, dass sich mithilfe dieser Angaben folgende Fragen eindeutig beantworten lassen:

a) Wie viele Disziplinen hat der M-athlon, an dem die Athleten A, B und C teilgenommen haben?

b) Eine weitere Disziplin dieses M-athlons war der Hochsprung. Welcher Teilnehmer wurde hier Zweiter?

Aufgabe 390845 (57%)

Ein Bauer hinterlässt seinen beiden Söhnen eine Schafherde. Die Brüder lassen diese Herde von einem Mittelsmann verkaufen, wobei sie ihm auftragen, er solle ein jedes der Schafe für so viel Mark verkaufen, wie die Herde Schafe hat.

Der Mittelsmann bringt den Erlös in lauter 10-Mark-Scheinen und einem Rest an Kleingeld, das keinen vollen 10-Mark-Schein mehr ergibt. Die Brüder teilen das Geld so, dass beide gleich viele 10-Mark-Scheine erhalten. Dabei bleiben ein 10-Mark-Schein und der Kleingeldrest übrig. Da sagt der ältere zum jüngeren Bruder:

„Ich nehme den Schein, und du bekommst den Rest und ein von mir soeben gekauftes Taschenmesser, dann haben wir beide gleich viel bekommen".

Wie teuer war das Taschenmesser?

Aufgabe 450842 (68%)

Drei Mathematiker sitzen am Abend in fröhlicher Runde in einem Biergarten am Waldesrand. Plötzlich fällt ein Schuss. Sie schauen zur Uhr, und kurz darauf sagt einer von ihnen: „Der Schuss fiel genau h Stunden, m Minuten und s Sekunden vor Mitternacht und merkwürdig: h, m und s sind Primzahlen, die der Gleichung $3s = h + m$ genügen." Darauf antwortet der zweite: „Auch die Anzahl der vollen Minuten bis Mitternacht ist eine Primzahl." Und der dritte sagt nach kurzer Prüfung mit dem Taschenrechner: „Sogar die Anzahl der Sekunden bis Mitternacht ist eine Primzahl."

Weise nach, dass man aus diesen (etwas kuriosen) Angaben eindeutig ermitteln kann, wann die Mathematiker den Schuss hörten und gib diesen Zeitpunkt an.

Hinweis: In dieser Aufgabe muss die Feststellung, dass eine Zahl Primzahl ist, nicht begründet bzw. bewiesen werden. Zur Ermittlung weiterer Primzahlen kann die folgende Liste aller Primzahlen unter 100 verwendet werden:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

Aufgabe 450845 (62%)

Als *erste* Quersumme $Q_1(n)$ einer natürlichen Zahl n sei die in bekannter Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist $Q_1(n)$ eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, dann sei deren Quersumme als *zweite* Quersumme $Q_2(n)$ bezeichnet. Entsprechend wird $Q_3(n)$ definiert.

a) Ermittle die kleinste Zahl n, für die $Q_3(n) = 11$ gilt.

b) Ermittle die größte Zahl, die als *dritte* Quersumme einer 2005-stelligen Zahl auftreten kann und gib die kleinste 2005-stellige Zahl an, die diese maximale dritte Quersumme besitzt.

c) Ermittle $Q_3(3^{1000})$, wobei vorausgesetzt wird, dass die Zahl $z = 3^{1000}$ genau 478 Ziffern besitzt.

Aufgabe 440842 (69%)

Wir betrachten in einer Ebene rote und blaue Punkte, von denen niemals mehr als zwei Punkte auf ein und derselben Geraden liegen.

a) Zeichne 4 rote und 2 blaue Punkte so, dass jedes aus 3 roten Punkten gebildete Dreieck, wir werden es „rotes Dreieck“ nennen, genau einen der beiden blauen Punkte in seinem Inneren enthält.

b) Zeichne 4 rote und 4 blaue Punkte so, dass jedes rote Dreieck genau einen blauen Punkt und jedes blaue Dreieck genau einen roten Punkt in seinem Inneren enthält.

c) Welche Bedingung müssen die 4 roten Punkte erfüllen, damit die in Teil a) und in Teil b) genannten Forderungen erfüllbar sind?

III. Zahlentheorie

Aufgabe 410845 (72%)

Beweise, dass sich unter je zehn aufeinander folgenden natürlichen Zahlen stets mindestens eine, aber höchstens vier Zahlen befinden, die durch keine der Zahlen 2, 3, 5 und 7 teilbar sind.

Aufgabe 440844 (67%)

Beweise folgende Aussage:

Wenn p und q Primzahlen sind, für die $q = p + 2$ und $p > 3$ gilt, dann folgt, dass der Nachfolger des Produktes von p und q stets durch 36 teilbar ist.

Aufgabe 470841

Scheich Olim hat verfügt, dass nach seinem Tod das gesamte Vermögen auf seine vier Söhne Alim, Elim, Ilim und Ulim aufgeteilt werden soll. Die Aufteilung wird dabei auf folgende Weise geregelt:

(1) Alim erhält genau so viel, wie Elim mehr als Ilim bekommt.
(2) Alim und Ulim bekommen zusammen so viel, wie Elim und Ilim zusammen.
(3) Ulim erhält weniger als Alim und Ilim zusammen.
(4) Keiner der vier Söhne geht leer aus und keine zwei dieser Söhne erhalten gleich viel.

a) Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, welcher Sohn den größten und welcher den kleinsten Anteil des Vermögens bekommt.

b) Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, welcher der anderen beiden Söhne den größeren Anteil erhält.

II. Logik/Kombinatorik

Aufgabe 400843 (76%)

Fritz hat für seine Geburtstagsgäste ein Spiel mit zwei Töpfen vorbereitet, deren Inhalt nicht eingesehen werden kann. In einem Topf T_1 sind genau drei rote Kugeln, in einem Topf T_2 genau drei blaue.

Manfred greift in beide Töpfe und holt je eine Kugel heraus. Er legt die Kugel aus T_1 in T_2 und die Kugel aus T_2 in T_1.
Jetzt ist Klaus an der Reihe. Jedem Topf entnimmt auch er eine Kugel, vertauscht sie wie vorher Manfred und legt sie zurück in die Töpfe.
Schließlich führt Manfred den Vorgang ein drittes Mal aus.

Jetzt werden beide Töpfe ausgeschüttet, um festzustellen, welche Kugeln sich nunmehr in den Töpfen befinden. Sind 3 rote Kugeln in T_1, gewinnt Manfred das Spiel. Sind 3 blaue Kugeln in T_1, gewinnt Klaus. Sonst gewinnt niemand.

a) Untersuche, wer von den beiden die größeren Gewinnchancen hat.

b) Berechne die Gewinnchancen für beide.

Aufgabe 410844 (88%)

Am Lagerfeuer in gemütlicher Runde berichtet Käpten Bröse seinen jungen Zuhörern: „Kürzlich unternahm ich eine Reise ins Land der Automaten. In diesem Land können die Automaten sprechen und auf jede Frage eine Antwort geben. Zudem haben sie noch eine andere merkwürdige Eigenschaft: Wenn sie einwandfrei funktionieren, geben sie nur richtige, wenn sie aber beschädigt sind, geben sie nur falsche Antworten.

Da stand ich dann auf einmal vor genau fünf Automaten und vermutete, dass einige von ihnen beschädigt waren, weil sie einander widersprechende Antworten gaben. Auf meine Frage, welche der Automaten beschädigt seien, erhielt ich folgende Antworten:

1. Automat: ”Mindestens zwei von den fünf Automaten funktionieren einwandfrei.“

2. Automat: ”Mindestens drei von den fünf Automaten funktionieren einwandfrei.“

3. Automat: ”Ich funktioniere einwandfrei.“

4. Automat: ”Mindestens zwei von den fünf Automaten sind beschädigt.“

5. Automat: ”Mindestens drei von den fünf Automaten sind beschädigt.“

Nun erkannte ich aber sofort an einem gerissenen Kabel, dass der 5. Automat beschädigt war, also eine falsche Auskunft gegeben hatte. Da war es mir sehr schnell und ohne weitere technische Überprüfung der anderen Automaten möglich herauszufinden, welche Automaten einwandfrei funktionierten und welche nicht. Aber sicherlich wäre euch dies auch gelungen.“

Zeige, dass sich aus diesen Angaben die Funktionstüchtigkeit dieser fünf Automaten ermitteln lässt.
Gib die defekten Automaten an.

Aufgabe 400844 (73%)

Peter würfelt viermal hintereinander mit einem Spielwürfel. Die dabei erzielten Augenzahlen sind 5, 2, 4, 3. Er notiert sie in dieser Reihenfolge und erhält so die Zahl 5243. Anschließend schreibt er die Augenzahlen der Unterseite der Würfel – also 2, 5, 3, 4 – in derselben Reihenfolge dahinter und erhält auf diese Weise die achtstellige Zahl 52432534. Er teilt diese achtstellige Zahl durch 1111, subtrahiert 7 und teilt das Ergebnis durch 9. Als Ergebnis erhält er die Zahl 5243, die der beschriebenen Anordnung der vier gewürfelten Augenzahlen entspricht.

Erhält Peter bei jeder beliebigen Kombination von vier Augenzahlen wieder die anfangs notierte vierstellige Zahl?

Hinweis: Jeder Spielwürfel ist so beschaffen, dass die Summe der Augenzahlen zweier gegenüberliegender Würfelflächen 7 beträgt.

Aufgabe 460844 (70%)

Jonas und Amelie ziehen Spielsteine auf einem kreisförmigen Spielbrett, das in n gleich große Sektoren unterteilt ist. Zuerst zieht Jonas vom Startfeld aus fünf Felder vor, dann bewegt Amelie ihren Stein vom Startfeld aus sieben Felder vor, dann zieht wieder Jonas fünf Felder vor, Amelie rückt sieben Felder weiter und so fort. Wer zuerst wieder auf dem Startfeld stehen bleibt, hat gewonnen.

a) Welcher Spieler gewinnt, wenn $n = 12$ gilt?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Jonas das Spiel, wenn für n eine beliebige zweistellige ganze Zahl zufällig ausgewählt wird?

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist definiert als Quotient aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen Ergebnisse und der Anzahl der möglichen Ergebnisse.