Trainingsaufgaben für die Mathematik-Olympiade

für individuell betreute Schüler der Klassenstufe 8 zur Vorbereitung einer erfolgreichen Teilnahme an der 3. Stufe der 51. Mathematik-Olympiade

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

du hast zum Schuljahresbeginn den 1. Teil einer Auswahl von Aufgaben, die in den vergangenen Jahren in der Mathematik-Olympiade gestellt wurden, erhalten. Vielen Schülern haben diese Trainingsaufgaben dabei geholfen, die 2. Stufe der Mathematik-Olympiade erfolgreich zu absolvieren und die 3. Stufe zu erreichen. Das hat zwar nicht in jedem Fall geklappt, aber vielleicht zeigt sich der Erfolg ja auch erst im nächsten Jahr.
Deshalb schicken wir dir beiliegend den **2. Teil** mit den etwas schwierigeren Aufgaben. Diese Aufgaben sind nach Themengruppen (Sachaufgaben und Arithmetik, Zahlentheorie, Kombinatorik, Geometrie) geordnet. Die jeweils hinter der Aufgabennummer angegebene Prozentzahl zeigt an, welcher Anteil der insgesamt bei dieser Aufgabe erreichbaren Punkte von den Startern des jeweiligen Olympiadejahrgangs aus dem Regierungsbezirk Chemnitz tatsächlich erreicht wurde.

Empfehlungen für ein erfolgreiches Training: Teile dir die Arbeit in Etappen ein und wähle für jede Etappe Aufgaben aus allen vier Themengebieten aus. Dein Betreuer wird dich dabei beraten. (Die angegebenen Prozentzahlen zeigen, dass der Erfüllungsstand der Geometrieaufgaben meist unter 50 Prozent lag und somit deutlich schwächer war als bei den anderen Themen. Es ist also wichtig, in jeder Trainingsetappe auch Geometrieaufgaben zu behandeln!)
Damit du den Überblick über die bereits bearbeiteten Aufgaben behältst, kannst du in der Übersicht immer ankreuzen, welche Aufgabe du schon bearbeitet hast.
Dein Betreuer erhält neben den Aufgaben auch die Lösungen. Nach dem Besprechen einer Aufgabe wird er dir eine Kopie der zugehörigen Lösung geben. Er wird dir mitteilen, zu welchen Aufgaben du eine schriftliche

Lösung anfertigen sollst, damit er erkennen kann, bis zu welchem Grad du die Technik des Darstellens einer Lösung bereits beherrschst. Bei allen anderen Aufgaben reicht es aus, wenn du dir Notizen zu dem von dir gefundenen Lösungsweg machst. Wenn du trotz Anstrengung keinen Lösungsweg findest, dann notiere dir die gescheiterten Lösungsversuche. Dein Betreuer wird dir in der Besprechung dann entsprechende Tipps geben.

Aufgaben-nummer		Seite	bearbeitet	mit Betreuer besprochen	Bemerkungen, Hinweise, Notizen
430832	62%	3			
420835	65%	3			
400831	45%	3			
370831	50%	4			
480831	40%	4			
410833	68%	5			
470833	60%	5			
460835	56%	6			
440832	55%	6			
380832	49%	6			
470834	49%	7			
490833	48%	7			
450832	39%	7			
430834	80%	8			
400835	41%	8			
460836	40%	9			
370834	41%	9			
410835	40%	10			
440833	35%	10			
440835	32%	10			
460834	34%	11			
400836	27%	11			
450833	39%	12			
450836	10%	12			
390833	23%	13			
400832	33%	13			
420833	35%	14			
470835	27%	15			
490835	18%	15			
480833	15%	15			

Aufgabe 470835 (27%)

Petra hat sich mit Eigenschaften von Umkreis und Inkreis eines Dreiecks beschäftigt und behauptet:

a) Ein Dreieck, in dem der Mittelpunkt des Umkreises mit dem Mittelpunkt des Inkreises übereinstimmt, ist gleichseitig.

b) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenlängen gleich der Summe der Durchmesserlängen von Umkreis und Inkreis.

Beweise oder widerlege diese Aussagen.

Aufgabe 490835 (18%)

Gegeben ist ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$. Der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{EB}$ ist mit F bezeichnet. Der Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{AB}$ schneidet die Gerade AE außer in A noch im Punkt G. Der Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AB}$ schneidet die Gerade CB außer in B noch im Punkt H.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen auch das Fünfeck $AGHBF$ regelmäßig ist.

Aufgabe 480833 (15%)

Das Dreieck ABC sei spitzwinklig und nicht gleichschenklig. Der Umkreis des Dreiecks werde mit k bezeichnet. Der Höhenschnittpunkt heiße H, der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten heiße M. Der von C verschiedene Schnittpunkt der Geraden durch C und H mit dem Kreis k werde mit F bezeichnet. Der von C verschiedene Schnittpunkt der Geraden durch C und M mit dem Kreis k werde mit G bezeichnet.

a) Beweise: Das Viereck $AGBH$ ist ein Parallelogramm.

b) Beweise: Wenn der Winkel $\angle BAC$ kleiner als der Winkel $\angle CBA$ ist, dann ist das Viereck $AGFB$ ein gleichschenkliges Trapez.

Aufgabe 420833 (35%)

Es seien *g*, *h* und *k* parallele Geraden, die folgende Forderungen erfüllen:

Der Abstand zwischen *g* und *h* beträgt 3 cm.
Der Abstand zwischen *h* und *k* beträgt 5 cm.
Der Abstand zwischen *g* und *k* beträgt 8 cm.

Zu konstruieren ist ein Viereck *ABCD*, das folgende Bedingungen erfüllt:

(a) *A* liegt auf *h*, *B* liegt auf *k* und *D* liegt auf *g*;
(b) ABCD ist ein Quadrat.

a) Beschreibe, wie man ein solches Viereck konstruieren kann und fertige eine Konstruktionszeichnung an.

b) Beweise: Wenn ein Viereck wie beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Bedingungen.

c) Berechne den Flächeninhalt des Quadrates *ABCD*.

d) Die Bedingung (a) werde wie folgt verändert:

(a*) *A* liegt auf *h*, von den Punkten *B*, *C*, *D* liegt einer auf *g*, ein zweiter auf *k*, der dritte auf keiner der drei Geraden.

Beweise, dass es außer dem in Teil a) konstruierten Quadrat noch genau zwei weitere (von diesem und auch untereinander verschiedene) Quadrate gibt, die die Bedingung (a*) erfüllen.
Konstruiere diese Quadrate. (Eine Konstruktionsbeschreibung wird nicht verlangt.)
Berechne den Flächeninhalt dieser Quadrate.

I. Sachaufgaben und Arithmetik

Aufgabe 420835 (65%)

Martina hat eine Salzlösung *L*1 bestehend aus 20 g Salz und 120 g Wasser und eine Salzlösung *L*2, die aus 40 g Salz und 120 g Wasser besteht. Durch Mischen dieser beiden Lösungen möchte sie eine Lösung *L*3 herstellen, die aus 25 g Salz und 120 g Wasser besteht.

Untersuche, ob es möglich ist, *L*3 durch Mischen aus *L*1 und *L*2 herzustellen.
Sollte das der Fall sein, dann gib an, wie viel Gramm von *L*1 und *L*2 miteinander gemischt werden müssen.

Aufgabe 430832 (62%)

Es seien F_1 und F_2 zwei Felder von rechteckiger Form. Die längere Seite von F_1 ist um 20% kürzer als die kürzeste Seite von F_2. Die längste Seite von F_2 ist um 40% länger als die kürzeste Seite von F_1. Auf beiden Feldern wurden Kartoffeln angebaut. Der Ertrag pro Hektar war auf F_1 um 40% größer als der Hektarertrag von F_2.

Ermittle, wie viel Prozent des Gesamtertrages von F_1 der Gesamtertrag von F_2 ist.

Aufgabe 400831 (45%)

Herr Schmitz berichtet von einem Geschäft, in dem er in 30 Minuten genau die Hälfte seines Geldes ausgegeben hat. Er hatte anfangs nicht mehr als 175 DM bei sich. Verblüfft stellte er fest, dass er nach dem Geschäft den gleichen Betrag an Pfennig besaß wie vorher an Mark und den halben Betrag an Mark wie vorher an Pfennig.

Wie viel Geld hat Herr Schmitz ausgegeben?
Weise nach, dass der ermittelte Betrag die gestellten Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 370831 (50%)

Der Mathematiker LEONHARD EULER (1707 - 1783) gab 1770 ein leicht verständliches Buch „*Vollständige Anleitung zur Algebra*“ heraus, das mehr als 100 Jahre lang eines der beliebtesten und meist gelesenen Bücher war. Die folgende Aufgabe stammt aus diesem Buch:

Eine Bäuerin tauschte Käse gegen Hühner. Für 2 Käse erhielt sie jeweils 3 Hühner. Die eingetauschten Hühner legten Eier. Die Anzahl der Eier, die jedes dieser Hühner legte, war gleich dem dritten Teil der Anzahl der eingetauschten Hühner. Mit diesen Eiern ging die Bäuerin auf den Markt. Die Anzahl der Pfennige, die sie für 9 Eier erhielt, war gleich der Anzahl der Eier, die jedes der eingetauschten Hühner gelegt hatte. Die Bäuerin erhielt für die verkauften Eier genau 72 Pfennige.

Weise nach, dass sich auf Grund dieser Angaben folgende Fragen eindeutig beantworten lassen:

a) Wie viele Hühner hat sie für den getauschten Käse erhalten?

b) Wie viele Stück Käse hat die Bäuerin getauscht?

c) Wie viele Eier hat die Bäuerin auf dem Markt verkauft?

Aufgabe 480831 (40%)

Ein Mathefloh hüpft auf der Zahlengeraden herum. Er springt von einer beliebigen rationalen Zahl a los, für die $a \neq 0$ und $a \neq 1$ gilt. Dabei darf er aber nur auf solchen rationalen Zahlen b landen, für die $b \neq 0$ und $b \neq 1$ gilt und welche die Sprungbedingung $a + \frac{1}{b} = 1$ erfüllen.

Weise nach: Der Floh kehrt stets nach gleich vielen Sprüngen erstmals zu seinem Ausgangspunkt zurück.

Aufgabe 400832 (33%)

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a = 4cm. Gesucht sind alle Punkte P, die folgende Bedingung erfüllen:

(1) P liegt auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$.

(2) Die Summe der Abstände, die P von den Punkten B und C hat, ist so groß wie die Summe der Abstände, die A von den Punkten B und C hat.

a) Beschreibe, wie solche Punkte konstruiert werden können, und fertige eine Konstruktionszeichnung an.

b) Beweise: Wenn ein Punkt nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt er die gestellten Bedingungen.

Aufgabe 390833 (23%)

Zu einem gegebenen Dreieck ABC sind zwei Punkte X und Y gesucht, für die Folgendes gelten soll:

(1) X liegt auf $\overline{AC}$ zwischen A und C.

(2) Y liegt auf $\overline{BC}$ zwischen B und C.

(3) Die drei Strecken $\overline{AX}$, $\overline{XY}$ und $\overline{YC}$ haben alle dieselbe Länge.

a) Leite aus den Forderungen (1), (2) und (3) Bedingungen für die Innenwinkelgrößen α und γ des Dreiecks ABC her.

b) Sei ABC ein Dreieck, das die in a) abgeleiteten Bedingungen erfüllt. Beschreibe eine Konstruktion von Punkten X und Y , die (1), (2) und (3) erfüllen.

Beweise: Wenn Punkte X , Y wie in b) beschrieben konstruiert wurden, dann erfüllen sie (1), (2) und (3).

Aufgabe 450833 (39%)

Drei kongruente Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 und dem Radius r verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt D. Diese Kreise schneiden einander außerdem in weiteren Punkten, die mit A, B und C bezeichnet werden.

a) Beweise, dass man einen Punkt S konstruieren kann, der von diesen drei Schnittpunkten den gleichen Abstand hat.

b) Vergleiche den Radius des Kreises mit dem Mittelpunkt S, auf dem A, B und C liegen, mit dem Radius r.

Aufgabe 450836 (10%)

Über sechs Punkte A, B, C, D, E und M wird vorausgesetzt:

(1) A, B, C bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in C.
(2) M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.
(3) D liegt auf der Seite $\overline{AC}$ und $\overline{DC}$ ist kürzer als $\overline{AD}$.
(4) E ist der Schnittpunkt der Geraden BC und MD.
(5) Die Strecken $\overline{ED}$ und $\overline{AB}$ sind gleich lang.

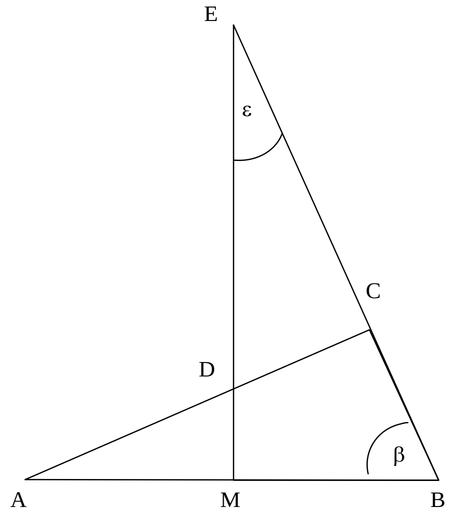

Abbildung A450836

Die Größe des Winkels CBA ist mit β, die des Winkels DEC mit ε bezeichnet (siehe Abbildung A450836).

a) Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen β = 3 ε folgt.

b) Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt: Der Winkel CMA ist dreimal so groß wie der Winkel CME.

II. Zahlentheorie

Aufgabe 410833 (68%)

König Sigmund will seinen beiden Söhne Raimund und Edmund einen Schatz gerecht aufgeteilt vererben. Der Schatz besteht aus 22 Goldstücken mit den Massen von 1 g, 2 g, ..., 22 g. Er versucht, die Goldstücke so aufzuteilen, dass beide Söhne die gleiche Masse Gold bekommen. Als ihm das nicht gelingt, fragt er seinen Freund, den König Hamar um Rat. Hamar ist Mathematiker und macht folgenden Vorschlag: „Ich stelle dir eine Aufgabe. Wenn du sie löst, bekommst du von mir ein Goldstück von 23 g. Damit wird dir eine gleichmäßige Aufteilung an deine Söhne gelingen. Löst du die Aufgabe nicht, bekomme ich deine Goldstücke von 21 g und 22 g. Auch dann kannst du deinen Schatz gerecht verteilen.

a) Zeige, dass für 20 Goldstücke und für 23 Goldstücke eine gerechte Verteilung möglich ist! Gib jeweils eine geeignete Verteilung an.

b) Zeige, dass für 22 Goldstücke eine gerechte Verteilung nicht möglich ist.

c) Für welche Anzahlen n von Goldstücken mit einer derartigen Massenverteilung ist eine gerechte Verteilung möglich, für welche nicht? Beweise deine Angaben.

Aufgabe 470833 (60%)

a) Ermittle den Wert der Summe s_2 aller zweistelligen Zahlen, die keine Null als Ziffer haben.

b) Ermittle den Wert der Summe s_3 aller dreistelligen Zahlen, die keine Null als Ziffer haben.

c) Leite aus den Werten von s_2 und s_3 Vermutungen für die Werte von s_4, s_5 und s_6 her. Stelle diese Werte so in Form von Produkten dar, dass zu erkennen ist, wie diese Vermutungen für die Werte von s_4, s_5 und s_6 aus den Werten von s_1, s_2 und s_3 abgeleitet wurden.

Aufgabe 460835 (56%)

Zu einer natürlichen Zahl n betrachten wir ihre Spiegelzahl $\overline{n}$ und das Produkt p(n) ihrer Ziffern. Die Spiegelzahl $\overline{n}$ hat die gleichen Ziffern wie n, aber in umgekehrter Reihenfolge. Die Zahl n soll folgenden Bedingungen genügen:

(1) Alle Ziffern sind von 0 verschieden.
(2) $n \cdot \overline{n} = 1000 + p(n)$.

Ermittle alle Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 440832 (55%)

Ermittle alle Tripel (x; y; z) natürlicher Zahlen, die die Gleichung

$$x + y + z + 2 = xyz$$

erfüllen.

Aufgabe 380832 (49%)

Man denke sich das Produkt P aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind. Beantworte, ohne dieses Produkt vollständig auszurechnen oder den Taschenrechner zu verwenden, folgende Fragen:

a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produktes?

b) Ist das Produkt eine 18-stellige Zahl?

Aufgabe 460834 (34%)

Über den Seiten eines Dreiecks ABC werden nach außen – wie in nebenstehender Abbildung A460834 zu sehen – gleichseitige Dreiecke errichtet. Die Punkte A_1, B_1 und C_1 sind die Spitzen der neuen Dreiecke.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Strecken $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ gleich lang sind.

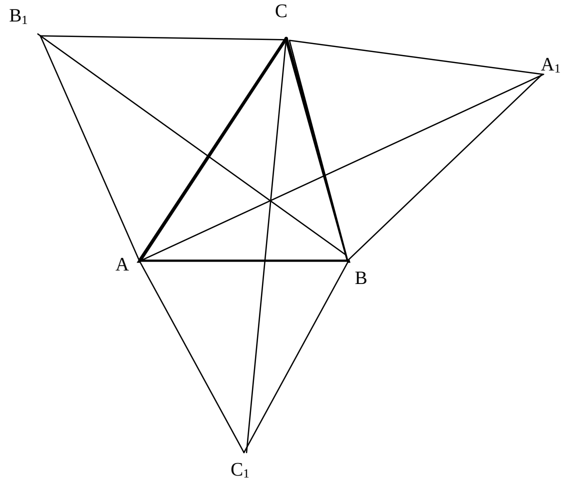

Abbildung A460834

Aufgabe 400836 (27%)

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A. Über der Seite $\overline{BC}$ sei ein Quadrat mit dem Diagonalenschnittpunkt S so gezeichnet, dass das Dreieck ABC nicht überdeckt wird. Das Lot von S auf die Gerade AB habe den Fußpunkt D. Das Lot von S auf die Gerade AC habe den Fußpunkt E.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Viereck ADSE stets ein Quadrat ist.

IV. G e o m e t r i e

Aufgabe 410835 (40%)

Es seien ABCD ein Quadrat, k_1 der Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$, dessen Punkte sämtlich im Inneren von ABCD liegen, und k_2 der Viertelkreisbogen um B mit dem Radius $\overline{AB}$, dessen Punkte ebenfalls sämtlich im Inneren von ABCD liegen. Außerdem schneide ein von B ausgehender Strahl den Halbkreis k_1 in E, den Kreisbogen k_2 in F und die Strecke $\overline{AD}$ in P.

a) Torsten behauptet, dass die Winkel EAF und FAD die gleiche Größe haben.
Beweise oder widerlege Torstens Behauptung.

b) Ermittle die Größe φ des Winkels AFB in Abhängigkeit von der Größe α_1 des Winkels BAE .

Aufgabe 440833 (35%)

Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit seinem Umkreis. Der Umkreismittelpunkt heißt M, der Höhenschnittpunkt heißt H, und M_c ist Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Die Gerade MC schneidet den Umkreis außer in C noch im Punkt P. Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt:

(1) Die Geraden AH und PB sind parallel.
(2) Die Punkte P, M_c und H liegen auf ein und derselben Geraden.

Aufgabe 440835 (32%)

In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sind M_c, M_a und M_b die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$. Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ sind nach außen Quadrate gezeichnet. Ihre Diagonalenschnittpunkte heißen D_1 und D_2.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt:

(1) Das Viereck $M_cM_aCM_b$ ist ein Parallelogramm.
(2) Das Dreieck $M_cD_1D_2$ ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.

Aufgabe 470834 (49%)

Das Quadrat der dreistelligen natürlichen Zahl 175 kann man folgendermaßen bilden:
Man streicht die Ziffer 5 . Es bleibt die Zahl 17 übrig. Diese multipliziert man mit ihrem Nachfolger 18 und erhält das Produkt 306 . Man hängt 25 an und erhält die Zahl 30625 . Die Probe $175^2 = 30625$ bestätigt dieses Ergebnis.

a) Beweise, dass dieses Verfahren für jede dreistellige Zahl mit der Endziffer 5 zum richtigen Ergebnis führt.

b) Untersuche, ob dieses Verfahren für jede beliebige Zahl mit der Endziffer 5 zum richtigen Ergebnis führt.

Aufgabe 490833 (48%)

Von einer sechsstelligen natürlichen Zahl z wird gefordert:
Streicht man die erste Ziffer und hängt sie hinter die verbleibenden fünf Ziffern an, dann erhält man eine Zahl, die dreimal so groß ist wie z .

Ermittle alle Zahlen, die diese Bedingungen erfüllen.

Aufgabe 450832 (39%)

Von einem geordneten Tripel (x ; y ; z) ganzer Zahlen wird gefordert:

(1) Die Summe der drei Zahlen dieses Tripels beträgt 6.
(2) Der Quotient aus dem Produkt der beiden ersten Zahlen und der dritten Zahl beträgt 6.
(3) Die Differenz aus dem Quadrat der ersten Zahl und der Summe aus den beiden anderen Zahlen beträgt ebenfalls 6.

Ermittle alle Tripel, die diese drei Forderungen gleichzeitig erfüllen.

III. Kombinatorik

Aufgabe 430834 (80%)

In 9 äußerlich nicht unterscheidbaren Töpfen befinden sich Karten. Auf jeder dieser Karten steht genau eine einstellige Zahl.

- Topf Nr. 1 enthält genau eine Karte mit der Zahl 1.
- Topf Nr. 2 enthält genau zwei Karten mit den Zahlen 1 und 2.
- Topf Nr. 3 enthält genau drei Karten mit den Zahlen 1, 2 und 3.

  ...
- Topf Nr. 9 enthält genau neun Karten mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9.

Wähle aus den 9 Töpfen einen aus und entnimm diesem Topf eine Karte. Was ist wahrscheinlicher:

a) Du erhältst eine Karte mit der Zahl 1, oder

b) du erhältst eine Karte mit einer der Nummern 5, 6, 7, 8 oder 9?

Aufgabe 400835 (41%)

Ermittle die Anzahl aller siebenstelligen Zahlen, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen:

(1) Die gesuchten Zahlen sind durch 15 teilbar.

(2) Jede der gesuchten Zahlen wird mit sieben aufeinander folgenden Ziffern aus der Folge 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 geschrieben, wobei diese dann in beliebiger Reihenfolge verwendet werden können.

Aufgabe 460836 (40%)

Anna möchte auf ihrer Geburtstagsparty eine Musik-CD verlosen. Jasmin und Jonas nehmen an einem „Gewinnspiel“ teil, das sich Anna dazu ausgedacht hat. Sie erklärt ihnen die Spielregel:

„Dieser Topf enthält blaue und gelbe Gummibärchen. Daneben liegt eine Tüte mit nur gelben Bärchen. Ich entnehme zunächst zwei Bärchen aus dem Topf. Ist das Paar gleichfarbig, wird ein Bärchen aus der Tüte in den Topf gelegt. Haben aber die entnommenen Bärchen unterschiedliche Farbe, lege ich das blaue Bärchen in den Topf zurück. Das wiederhole ich so lange, bis ich das letzte Bärchenpaar aus dem Topf genommen habe und schließlich nur noch ein einziges Bärchen im Topf liegt. Ist dieses Bärchen blau, gewinnt Jonas, ist es aber gelb, gewinnt Jasmin.“

Untersuche, in welcher Weise die Gewinnchancen von Jasmin und von Jonas von der Anzahl der gelben und von der Anzahl der blauen Bärchen abhängig sind.

Aufgabe 370834 (41%)

Ermittle die Anzahl aller Dreiecke, deren sämtliche Eckpunkte auch Eckpunkte

a) eines Siebenecks,

b) eines Hundertecks

sind.

Hinweis: In dieser Aufgabe ist auch bei Verwendung einer als bekannt angegebenen Formel eine Begründung zu erbringen.