Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler

www.bezirkskomitee.de

Trainingsaufgaben für die Mathematik-Olympiade

für individuell betreute Schüler der Klassenstufe 6 und für Frühstarter aus der Klassenstufe 5 zur Vorbereitung einer erfolgreichen Teilnahme an der 3. Stufe der 51. Mathematik-Olympiade in der Olympiadeklasse 6

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

du hast zum Schuljahresbeginn den 1. Teil einer Auswahl von Aufgaben, die in den vergangenen Jahren in der Mathematik-Olympiade gestellt wurden, erhalten. Vielen Schülern haben diese Trainingsaufgaben dabei geholfen, die 2. Stufe der Mathematik-Olympiade erfolgreich zu absolvieren und die 3. Stufe zu erreichen. Das hat zwar nicht in jedem Fall geklappt, aber vielleicht zeigt sich der Erfolg ja auch erst im nächsten Jahr.

Deshalb schicken wir dir beiliegend den **2. Teil** mit den etwas schwierigeren Aufgaben. Die jeweils hinter der Aufgabennummer angegebene Prozentzahl zeigt an, welcher Anteil der insgesamt bei dieser Aufgabe erreichbaren Punkte von den Startern des jeweiligen Olympiadejahrgangs aus dem Regierungsbezirk Chemnitz tatsächlich erreicht wurde.

Empfehlungen für ein erfolgreiches Training: Teile dir die Arbeit in Etappen ein und wähle für jede Etappe Aufgaben aus den drei angegebenen Aufgabengruppen aus. Dein Betreuer wird dich dabei beraten. Damit du den Überblick über die bereits bearbeiteten Aufgaben behältst, kannst du in der Übersicht immer ankreuzen, welche Aufgabe du schon bearbeitet hast.

Dein Betreuer erhält neben den Aufgaben auch die Lösungen. Nach dem Besprechen einer Aufgabe wird er dir eine Kopie der zugehörigen Lösung geben. Er wird dir mitteilen, zu welchen Aufgaben du eine schriftliche Lösung anfertigen sollst, damit er erkennen kann, bis zu welchem Grad du die Technik des Darstellens einer Lösung bereits beherrschst. Bei allen anderen Aufgaben reicht es aus, wenn du dir Notizen zu dem von dir gefundenen Lösungsweg machst. Wenn du trotz Anstrengung keinen Lösungsweg findest, dann notiere dir die gescheiterten Lösungsversuche. Dein Betreuer wird dir in der Besprechung dann entsprechende Tipps geben.

Aufgaben-nummer		Seite	bearbeitet	mit Betreuer besprochen	Bemerkungen, Hinweise, Notizen
430635	56%	3			
430634	55%	4			
420636	45%	4			
470634	57%	5			
420632	42%	5			
400631	69%	6			
450636	63%	6			
470633	77%	7			
410631	55%	7			
400632	57%	8			
420635	54%	9			
460636	50%	9			
400636	46%	10			
430633	28%	11			
460633	36%	12			
480633	26%	12			
410633	26%	13			
390632	61%	13			
440636	46%	14			
440635	59%	15			
450633	55%	15			
380633	48%	16			
440633	44%	17			
430636	35%	18			
480636	30%	19			

480636 (30%)

Wenn man einen Käfer (oder einen Roboter oder einen Zeichenstift) auf einem quadratischen Gitter bewegen will, so kann man dies durch eine Folge von drei Grundkommandos machen::

G - Gehe von einem Gitterpunkt aus eine Kästchenlänge und ändere am nächsten Gitterpunkt deine Richtung nicht.

L - Gehe eine Kästchenlänge und wende dich am nächsten Gitterpunkt nach links.

R - Gehe eine Kästchenlänge und wende dich am nächsten Gitterpunkt nach rechts.

Grundsätzlich soll am Anfang der Käfer mit „dem Gesicht nach rechts“ also auf einer waagerechten Gitterlinie nach rechts gehen. Wir geben zwei Folgen von Kommandos vor:

(1) LRRG ;

(2) LRRGLLRRG .

a) Zeichne auf kariertem Papier für beide Folgen jeweils die Figur, die entsteht, wenn die Kommandofolge viermal hintereinander durchgeführt wird.

b) Jetzt wird bei der Kommandofolge (1) *jeder Weg über eine Kästchenlänge* durch einen Weg ersetzt, der durch die Kommandofolge (2) LRRGLLRG erzeugt wird und bei dem die Weg-Einheit nur ein Viertel Kästchenlänge lang ist.
Wiederum: Wie viele Kästchen umschließt der Weg (nach viermaliger Durchführung von (1))? Wie viele Kästchenlängen ist der Weg lang?

c) Beweise: Wenn sich in einer Kommandofolge die Zahl der R’s und der L’s um genau 1 unterscheidet, dann entsteht bei viermaliger Durchführung ein geschlossener Weg, der bei weiteren Durchführungen immer wiederholt wird.

Aufgabe 430636 (35%)

Ein Dreiecksfraktal entsteht,

- indem man im ersten Schritt mit einem Dreieck anfängt (hier ist es ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, bei dem die kürzeren beiden Seiten beide 3 cm lang sind, siehe Abbildung A430636 a)
- und in jedem Schritt an alle bisherigen Ecken drei neue, dem ursprünglichen Dreieck ähnliche Dreiecke ansetzt, deren Seitenlängen immer nur ein Drittel so lang sind wie die Längen des vorigen Schritts.

In Abbildung A430636 b sehen wir das Ergebnis nach dem dritten Schritt.

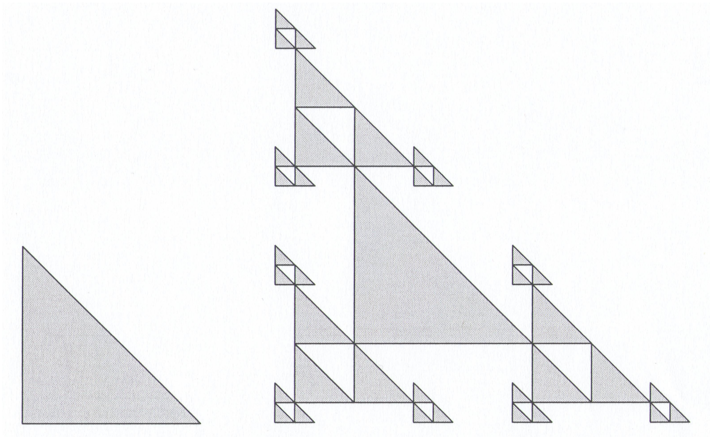


Abbildung A430636a *Abbildung A430636b*

a) Aus wie vielen Dreiecken besteht das Fraktal nach dem fünften Schritt?

b) Welchen Flächeninhalt hat das Fraktal nach dem dritten Schritt?

c) Welchen Flächeninhalt hat das Fraktal nach dem vierten Schritt?

d) In jedem Schritt passt das Fraktal genau in ein Quadrat. Welchen Flächeninhalt hat dieses Quadrat nach dem fünften Schritt?

I. Lösen mit Hilfe von Gleichungen mit Variablen

Aufgabe 430635 (56%)

Frau Meier hat im Oktober Marmelade gekocht und sie dann in Gläser gefüllt. Sie hatte dazu Gläser mit drei verschiedenen Größen. Die fertigen Gläser stellte sie in ein Regal mit drei Brettern - wie man es in Abbildung A430635 sehen kann.

Zu Weihnachten kam Frau Müller zu Besuch, sah das Marmeladenregal und fragte: „Sag mal, warum stehen denn die Gläser in so merkwürdiger Anordnung?“ „Ganz einfach“, antwortete Frau Meier, „ich weiß, dass auf jedem Regalbrett 3,6 kg Marmelade stehen.“

Frau Müller dachte einen Moment nach und strahlte: „Dann weiß ich auch, wie viel Marmelade die drei verschiedenen Gläsertypen jeweils enthalten.“

Wie viel Gramm Marmelade passt jeweils in die verschiedenen Gläser? Mache eine Probe.

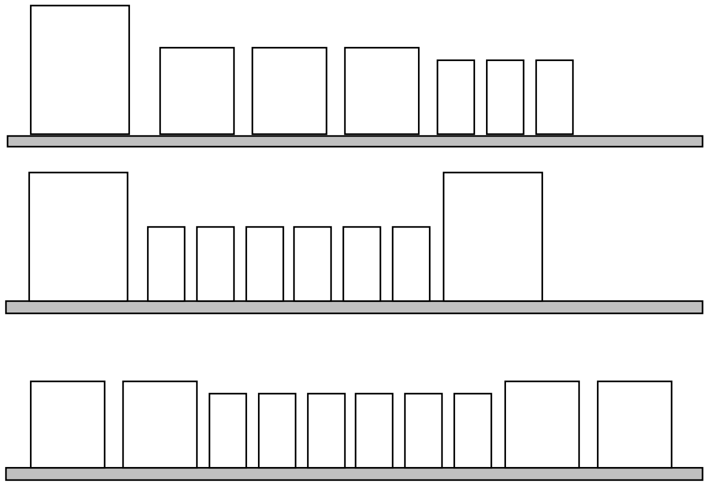


Abbildung A430635

Aufgabe 430634 (55%)

Sieben gleich große, deckungsgleiche Rechtecke werden zu einem großen Rechteck zusammengelegt (siehe Abbildung A430634). Zusammen haben sie eine Flächeninhalt von 2100 cm².

Wie groß sind die Seitenlängen der sieben Rechtecke?

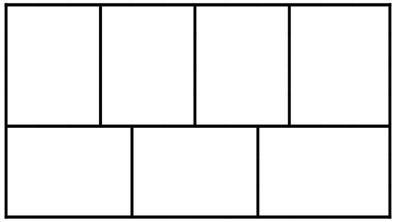


Abbildung A430634

Aufgabe 420636 (45%)

Eine Aufgabe aus dem alten Babylon. „Es waren einst acht Schwestern, alle unterschiedlich alt. Sie sollten den Wert von 1 2/3 Silberminas untereinander aufteilen. Jede der nach steigendem Alter geordneten Schwestern sollte der Reihe nach mehr als die vorherige erhalten. Die Differenz zwischen den Anteilen sollte stets gleich bleiben. Die zweite Schwester durfte sich den Silberwert von 6 Schekel nehmen.

Wie viele Grains hat jede der Schwestern erhalten?"

Zeige in einer Probe, dass dein Ergebnis richtig ist! Man muss dazu noch wissen, wie im alten Babylon die Währung eingeteilt war: 1 Talent hat 60 Silberminas, 1 Silbermina hat 60 Silberschekel, 1 Silberschekel hat 60 Grains.

Aufgabe 440633 (44%)

a) Welchen Flächeninhalt hat die innerste grau gefärbte Teilfläche in Abbildung A440633?

b) Welchen Flächeninhalt hat die gesamte grau gefärbte Fläche?

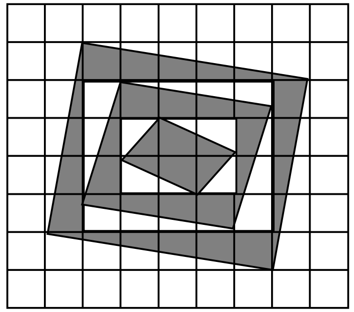


Abbildung A440633

c) Man kann das Bild in dieser Abbildung als Ergebnis eines mehrfach wiederholten Prozesses auffassen, bei dem immer wieder außen an der bisherigen Figur etwas angefügt wird. Wie groß ist dann der Inhalt der nächsten dazukommenden grauen Fläche?

d) Wenn man diesen Prozess weiter durchführt, so befindet sich die gesamte grau gefärbte Fläche immer genau passend in einem Rechteck, dessen Seiten auf Gitterlinien liegen und dessen Breite um ein Kästchen größer ist als die Länge. Welchen Flächeninhalt hat die entsprechend gebildete gesamte grau gefärbte Fläche, die zu einem Rechteck mit den Seitenlängen n und $(n - 1)$ gehört?

Aufgabe 380633 (48%)

Leicht überprüft man

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$$

Allgemein gilt offensichtlich :

$$1 + 3 + 5 + ... + u = a^2$$

wobei u eine beliebige ungerade Zahl ist.

a) Berechne jeweils a^2 und a .

$$1 + 3 + 5 + ... + 29 = a^2$$
$$1 + 3 + 5 + ... + 103 = a^2$$

b) Michael sagt zu Amelie, dass er eine Formel gefunden hat, mit der man a berechnen kann, wenn man die letzte ungerade Zahl u einer solchen Summe kennt.
Gib eine Formel an und weise nach, dass sie für u = 29 und für u = 103 die von dir berechneten Resultate liefert.

c) Amelie überlegt weiter und behauptet: „Jede ungerade Zahl lässt sich als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben.“
Weise für die drei ungeraden Zahlen 7, 17 und 217 nach, dass Amelie Recht hat.

d) Während Michael noch nachdenkt, arbeitet Amelie schon weiter. Sie schreibt folgende richtige Gleichungen hin:

$$4 = 2^2 - 0^2 ,\quad 8 = 3^2 - 1^2,\quad 12 = 4^2 - 2^2 ,$$
$$16 = 4^2 - 0^2 ,\quad 20 = 6^2 - 4^2 ,\quad 32 = 6^2 - 2^2 .$$

Sie teilt Michael mit: „Ich vermute, dass man jede Zahl, die sich durch 4 teilen lässt, als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen kann.“

Zeige, dass Amelie Recht hat.

Aufgabe 470634 (57%)

Auf dem Weihnachtsbasar werden Säckchen angeboten, die bunte Glasmurmeln in drei verschiedenen Größen (klein, mittel groß) enthalten.
- Ein Säckchen vom Typ A enthält 5 kleine Murmeln, 9 mittlere und 4 große;
- ein Säckchen vom Typ B enthält 17 kleine Murmeln, 1 mittlere und 6 große;
- ein Säckchen vom Typ C enthält 27 kleine Murmeln, 5 mittlere und 4 große.

Jede Murmelsorte hat einen anderen Preis. Alle Säckchen kosten gleich viel, nämlich 5,60 €.

a) Wie viel kostet eine kleine Murmel? Wie viel eine mittlere? Wie viel eine große? Mache eine Probe.

b) Annabella braucht für ihren Bruder 20 kleine Murmeln, 10 mittlere und 10 große. „Ja“, sagt der Verkäufer auf dem Basar. „Wenn du die Kugeln einzeln kaufen möchtest, kostet eine kleine Murmel 0,15 €, eine mittlere 0,35 € und eine große 0,70 €“. Annabelle überlegt kurz und sagt dann: „Gut, dann nehme ich ein Säckchen und kaufe noch einige Einzelmurmeln dazu.“
Welches Säckchen könnte sie wählen, und wie viel muss sie dann insgesamt bezahlen?

c) Auf dem Heimweg denkt sie noch einmal nach - und muss feststellen, dass sie noch mehr Geld hätte sparen können. Wie? Und wie viel?

Aufgabe 420632 (42%)

Wähle drei von Null verschiedene Ziffern. Bilde aus jeweils 2 dieser Ziffern eine zweistellige Zahl. Schreibe alle Zahlen auf, die sich so bilden lassen. Nun addiere alle diese Zahlen. Teile diese Summe durch die Summe der drei von dir am Anfang gewählten Ziffern. Wetten, dass du stets dasselbe Ergebnis erhältst!

a) Wie lautet dieses Ergebnis?

b) Warum ist das immer so?

II. Lösen ohne Verwenden von Gleichungen mit Variablen

Aufgabe 400631 (69%)

Herr Siemssen hat drei Töchter, Frauke, Heinke und Wiebke. Er weiß, dass alle drei liebend gern Erdbeeren essen, und stellt ihnen deshalb eine Schüssel voller schöner Erdbeeren auf den Tisch. Auf einem Zettel schreibt er dazu, dass sich jede Tochter ein Drittel nehmen möge. Als Erste kommt Heinke. Sie liest den Zettel, nimmt sich zunächst eine Erdbeere, da sich die Zahl der Erdbeeren nicht durch 3 teilen lässt, und dann ein Drittel der Erdbeeren.

Als Zweite kommt Frauke. Sie glaubt, sie sei als erste gekommen, nimmt sich zunächst auch zwei Erdbeeren, da sich die Zahl der Erdbeeren wieder nicht durch 3 teilen lässt, und vom verbleibenden Rest wieder ein Drittel.

Wiebke kommt als letzte, aber auch sie glaubt, als erste zu kommen. Deswegen nimmt auch sie zunächst zwei Erdbeeren - denn die Zahl der Erdbeeren lässt sich wieder nicht durch 3 teilen - und vom verbleibenden Rest wieder den dritten Teil.

Herr Siemssen schaut abends in die Schüssel und stellt zu seinem Erstaunen fest, dass immer noch zwanzig Erdbeeren in der Schüssel liegen, obwohl alle Töchter zu Hause sind.
Wie viele Erdbeeren waren anfangs in der Schüssel?

Hinweis: Wenn du gezeigt hast, dass nur die von dir gefundene Anfangszahl wie im Text beschrieben zur Endzahl 20 führen kann, dann weise durch eine Probe nach, dass sie das wirklich tut! (Nur eine Probe zu machen, reicht allerdings nicht, solange nicht klar ist, ob es noch eine zweite Anfangszahl geben könnte, mit der die Probe ebenfalls gelingen würde.)

Aufgabe 450636 (63%)

Im Weinkeller stehen ein 12-l-Krug, ein 7-l-Krug und ein 5-l-Krug. Der 12-l-Krug ist voll mit gutem Wein; die anderen beiden Krüge sind leer.

Wie kann die Weinmenge durch (mehrfaches) Umfüllen in zwei gleiche Teile geteilt werden?

Aufgabe 440635 (59%)

a) Ermittle die Gesamtzahl der Gitterpunkte des abgebildeten 4 x 4 x 4 - Würfels! Bestimme dabei auch die Anzahl der Gitterpunkte auf der Oberfläche und die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren des Würfels.

b) Ermittle die entsprechenden Anzahlen der Gitterpunkte für den 5 x 5 x 5 - Würfel.

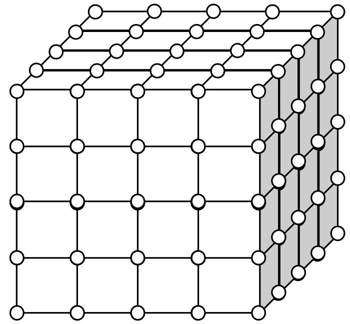


Abbildung A440635

c) Beschreibe für einen n x n x n - Würfel, wie du die Gesamtzahl der Gitterpunkte, die Anzahl der inneren und die der äußeren Gitterpunkte berechnest.

Aufgabe 450633 (55%)

Überall auf den Treppenstufen liegen viele Erbsen. Die Treppe hat 14 Stufen. Jede Erbse, die zum ersten Mal über eine Stufe rollt, setzt auf der nächsten Stufe zwei weitere Erbsen in Bewegung. Sie bleibt dann auf der übernächsten Stufe liegen, ohne dort noch einmal Erbsen in Bewegung zu setzen. Oben beginnt das Ganze mit einer rollenden Erbse.

a) Gib an, wie viele Erbsen auf der 1., 2., 3. und 4. Stufe, von oben gezählt, ankommen.
b) Wie viele Erbsen kommen unten an?
c) Wie viele Erbsen würden unten ankommen, wenn die Treppe 20 Stufen hätte?

(Zusatzfrage - ohne Wertung: Kannst du eine allgemeine Formel für eine noch längere Treppe mit *n* Stufen angeben?)

d) Verschieden sind zwei Dreiecke auf dem Nagelbrett, wenn sie sich in der Form oder in der Größe unterscheiden. Es gibt auf dem 4 x 4 - Nagelbrett 29 verschiedene Dreiecke.
Zeichne davon sechzehn, die man zwar auf dem 4 x 4 - Nagelbrett erhalten kann, aber nicht auf einem 3 x 3 - Nagelbrett.

Aufgabe 440636 (46%)

Paul und Peter vertreiben sich an einem dunklen Novembertag die Zeit mit Würfelspielen. Peter wählt seinen Lieblingswürfel – einen roten. Paul hingegen bevorzugt einen blauen Würfel.

a) Peter schlägt folgendes Spiel vor: „Wir würfeln beide je einmal und berechnen dann jeweils die Augensumme. Ist die Augensumme gerade, so gebe ich dir einen Euro, ist die Augensumme ungerade, so gibst du mir einen Euro. “ Wer gewinnt auf Dauer?

b) Nach längerer Spielzeit meint Paul: „Das Spiel bringt doch nichts! Ich schlage vor: Ich bekomme von dir einen Euro, wenn die Augensumme mindestens gleich 7 ist; ansonsten gebe ich dir einen Euro!“ Sollte sich Peter auf das Spiel einlassen?

c) Auch hier ergibt sich nach längerer Spielzeit Unzufriedenheit und Peter macht den dritten Vorschlag: „Wenn die Augensumme durch 3 oder durch 7 teilbar ist, dann bekomme ich von dir einen Euro, in allen anderen Fällen gebe ich dir einen Euro.“ Wie stehen die Gewinnchancen bei diesem Spiel?

d) Am nächsten Tag hat Conny Langeweile und möchte mitspielen. Conny bringt seinen gelben Würfel mit. Paul und Peter würfeln weiterhin mit dem blauen und roten Würfel. Conny behauptet, dass es nicht mehr als 20 Möglichkeiten gibt, mit den drei unterscheidbaren Würfeln die Augensumme 8 zu würfeln. Hat er Recht?

Aufgabe 470633 (77%)

Auf einer alten Webmaschine werden Tücher gewebt, die jeweils 90 cm lang und 110 cm breit sind. In jeder Stunde werden 16 Tücher fertiggestellt.

a) Wie viele Tücher entstehen innerhalb von einer Arbeitswoche, wenn die Maschine an jedem der fünf Arbeitstage 9 Stunden läuft?

b) An der Maschine arbeiten zwei Leute; es entstehen pro Stunde Lohnkosten von 69,30 €. Das Material für ein Tuch kostet 9,40 €.
Eine begeisterte Kundin will sich aus den Tüchern einen Sofa-Überwurf von der Größe 549 cm x 440 cm nähen. Sie will aber nur 300 € ausgeben.
Kann sie mit den Tuchherstellern handelseins werden, wenn sie weiß, dass der Tuchhersteller höchstens 10% Rabatt gewährt?

c) In dieser Wegmaschine befinden sich drei Zahnräder, die ineinander greifen. Das große Zahlrad hat 72 Zähne, das mittlere halb so viele, und das kleine Zahnrad weist 16 Zähne auf. Jedes Mal, wenn sich das kleine Zahnrad einmal gedreht hat, ist ein Tuch fertig gewebt.
Am Ende des Arbeitstages sollen immer die drei Zahnräder in derselben Position wie am Anfang des Arbeitstages stehen.
Zeige, dass dies bei dem bisherigen 9-Stunden-Arbeitstag zutrifft.
Ist es auch möglich, dass die Webmaschine nur genau acht Stunden pro Tag arbeitet und die Zahlrad-Bedingung immer noch erfüllt ist?

Aufgabe 410631 (55%)

Es ist Familienfest bei der Großfamilie von Schmidt-Treuenfels. Das Familienoberhaupt blickt in die Runde und stellt zunächst fest, dass zwischen dem Säuglingsalter von 1 Jahr und dem hohen Alter der Urgroßmütter recht viele Alterswerte vorkommen. Dann bittet er die Anwesenden - Säuglinge bis Urgroßmütter -, sich in Dreiergruppen zusammen zu finden.

In jeder Dreiergruppe soll jetzt das Produkt der drei Alterswerte gebildet werden. Mehr als eine Dreiergruppe stellt fest, dass das Produkt ihrer Alterswerte die Zahl 1305 ergibt. (Das ist wichtig, denn die Familie von Schmidt-Treuenfels ist bis zum Jahr 1305 zurückzuverfolgen.)

a) Wie viele derartige Dreiergruppen mit jeweils unterschiedlichen Alterswerten kann es realistisch geben? Gib diese Dreiergruppen an.
b) Vor wie viel Jahren wurde jeweils die älteste Person in jeder möglichen Dreiergruppe geboren?

Aufgabe 400632 (57%)

Adelheid, Burglinde, Christfriede, Dorothea und Edelgard kommen in ein Gartenlokal. Dort gibt es noch zwei freie Tische, einen mit zwei Plätzen an der Hecke und einen mit drei Plätzen mit einer guten Aussicht.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für die fünf Damen an diesen beiden Tischen Platz zu nehmen? (Es kommt dabei nicht auf die Sitzordnung an den Tischen, sondern nur auf die möglichen Zweier- und Dreiergruppen an.)

b) Leider können sich Burglinde und Dorothea nicht leiden und weigern sich daher, zusammen an einem Tisch zu sitzen. Wie viele Möglichkeiten gibt es unter dieser Voraussetzung?

c) Friederike kommt dazu und hat sich einen Stuhl mitgebracht. Die fünf Damen stehen auf, begrüßen Friederike und wollen sich wieder hinsetzen. Friederike kann ihren Stuhl übrigens sowohl an den Zweier-Tisch wie an den Dreier-Tisch stellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt für die sechs Damen, sich an den beiden verschiedenen Tischen zu gruppieren?
(Vergiss nicht die Abneigung von Dorothea und Burglinde!)

d) Friederike möchte eigentlich gern mit Burglinde an einem Tisch sitzen. Bei wie vielen der Möglichkeiten aus c) muss sie dazu mit einer Dame tauschen?

Hinweis: Wenn du beispielsweise die Sitzordnung mit Burglinde und Edelgard am Zweier-Tisch beschreiben willst, so ist dies am besten durch „BE ACD“ anzugeben.

Aufgabe 410633 (26%)

Anton und Bert spielen eine etwas kompliziertere Version des NIM-Spiels. Zu Beginn liegen drei Häufchen mit je 6 Hölzchen zwischen ihnen, d.h. die Ausgangstellung des Spiels lautet (6;6;6). In jedem Zug ziehen sie entweder ein oder zwei Hölzchen von einem der drei Häufchen. Wer die Zielstellung (0;0;0) erreicht, hat gewonnen.

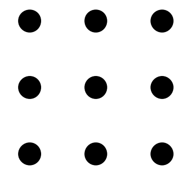
a) Gib alle Stellungen an, die beim Fortschreiten des Spiels erreicht sein können, von denen ausgehend Anton mit seinem übernächsten Zug gewinnen kann. Gib jeweils seinen nächsten Zug an und zeige, dass er auf diese Weise tatsächlich stets gewinnen kann.

b) Untersuche, ob Anton von der Stellung (2;2;3) ausgehend gewinnen kann, wenn Bert niemals einen falschen Zug macht.

c) Bert behauptet, dass er das Spiel stets gewinnen kann, wenn Anton mit der Ausgangsstellung (6;6;6) beginnt, und dass er den Gewinn stets mit dem 6. Zug erreichen kann.
Weise nach, dass Berts Behauptung stimmt.

III. Vermischte Aufgaben

Aufgabe 390632 (61%)



n x n Nägel werden in einer quadratischen Anordnung auf ein Brett genagelt. Nebenstehend ist ein Beispiel für n = 3 abgebildet. Nun werden Gummibänder so über die Nägel gespannt, dass sie jeweils ein Dreieck bilden.

a) Nimm das kleinste rechtwinklige Dreieck. Wie oft kommt es auf einem 4 x 4 - Nagelbrett vor?

b) Wie oft kommt dieses Dreieck auf einem 5 x 5 - Nagelbrett vor?

c) Wie oft kommt es auf einem n x n-Nagelbrett vor?

(Fortsetzung nächste Seite ...)

Aufgabe 480633 (36%)

Gulliver kommt auf seinen Reisen auch auf die fliegende Insel *Laputa*, auf der die Astronomen herrschen.
Die Astronomen haben ihre Zeit anders eingeteilt als wir: „Bei uns hat der Tag zehn Horen. Jede Hore hat einhundert Menores, und jeder Menor besteht wieder aus einhundert Diminuti. Durch lange Beobachtung haben wir festgestellt, dass unser Diminuti genau so lange dauert wie euere Sekunde“ sagt der Chef-Astronom zu Gulliver.

Gulliver stutzt. Er überlegt:

a) Wie lang dauert demzufolge ein Tag auf Laputa, gemessen in Stunden, Minuten und Sekunden?

b) Dann weiß Gulliver plötzlich, was los ist. Laputa befindet sich zwar auf der Erde, es ist aber schließlich eine fliegende Insel.
Gulliver schließt messerscharf: Die Insel umkreist die Erde in geringer Höhe und fliegt ständig nach Westen.
Wie kommt er zu diesem Schluss?

c) Wenn jetzt Laputa über uns vorbeifliegen würde - wann wäre dann die Insel zum ersten Mal wieder zu beobachten? Runde die benötigte Zeit auf volle Tage und Stunden.

Aufgabe 460633 (28%)

Im Lande Merkwürdien gibt es nur Münzen zu 7 Cent und zu 12 Cent. Bekannt ist, dass sich mit diesen Münzen zwar nicht 65 Cent, aber alle Preise ab 66 Cent bezahlen lassen. Als „gut“ gelten nur solche Preise, die man auf mindestens zwei Arten (also mit mindestens zwei verschiedenen Kombinationen von Münzen) mit diesen Münzen bezahlen kann.

a) Welches ist der kleinste „gute“ Preis?
b) Welches sind die vier nächst größeren „guten“ Preise?
c) Von welchem Preis an sind alle Preise „gut“?

Aufgabe 420635 (54%)

Die fünf Freunde Franz, Klaus, Otto, Paul und Walter treffen sich und tauschen Fußballerbilder. Es bringt jeder vier Bilder mit und tauscht dafür vier neue Bilder ein. Keiner der fünf Freunde verteilt seine Bilder in gleicher Weise. Einer der fünf gab zwei Bilder an einen Freund und zwei Bilder an einen anderen, damit bekamen die beiden restlichen Freunde von ihm keine Bilder – das kann man mit (2 ; 2 ; 0 ; 0) darstellen. Diese Verteilungsmöglichkeit kam – wie jede andere – nicht noch einmal vor. Es ist bekannt:

(1) Paul gab seine vier Bilder an Franz.
(2) Otto erhielt von Klaus drei Bilder.

a) Welche verschiedenen Verteilungsmöglichkeiten gibt es für die vier Bilder?

b) Von wem stammen die vier Bilder, die Walter erhalten hatte? Begründe.

c) Gib an, wer wem wie viele Bilder gab. Begründe.

Aufgabe 460636 (50%)

Auf dem Planeten Pombo sagen die Wombies stets die Wahrheit, während die Lombies immer lügen. Ein Bewohner des Nachbarplaneten Nombo besucht den Pombo und interviewt Ehepaare.

a) Beim ersten Ehepaar fragt er: „Was seid ihr?“ Der Ehemann antwortet: „Wir sind beide Lombies!“ Welchem Typ gehört der Ehemann an, welchem seine Gattin?
b) Beim nächsten Ehepaar auf Pombo erhält der Besucher vom Nombo von der Ehefrau die Antwort: „Mindestens einer von uns ist ein Lombie.“ Welchem Typ gehört die Ehefrau an, welchem ihr Gatte?
c) Beim dritten Ehepaar antwortet der Mann: „Wenn ich ein Wombie bin, dann ist meine Frau auch ein Wombie.“ Welchem Typ gehört dieser Mann an, welchem seine Frau?

Aufgabe 400636 (46%)

Ein Würfel hat die Kantenlänge 60 cm. Drei seiner Seitenflächen sind gefärbt, und zwar rot, blau und grün. Die drei farbigen Flächen stoßen in einer Ecke zusammen. Nun wird dreimal gesägt. Die Fläche, die beim Sägen entsteht, ist jedes Mal eine ebene Fläche, die im Abstand 20 cm parallel zu einer der drei gefärbten Seitenflächen verläuft, beim ersten Mal parallel zur roten Fläche, beim zweiten Mal zur blauen und beim dritten Mal zur grünen Fläche. Jedes Mal nach dem Sägen werden die entstandenen Teilkörper zusammengehalten, so dass sie beim nächsten Sägeschnitt alle weitergeteilt werden.

a) Beschreibe alle mit dem dritten Sägeschnitt entstandenen Teilkörper! Welche Form haben sie? Wie lang sind sie jeweils, wie breit, wie hoch? Haben sie gefärbte Seitenflächen, und mit welchen Farben? Beschreibe die Gestalt und die gegenseitige Lage dieser gefärbten Seitenflächen der Teilkörper.

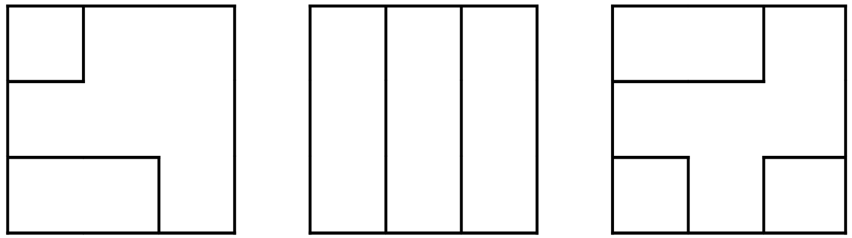
b) Wie groß ist die Summe der Oberflächen aller mit dem dritten Sägeschnitt entstandenen Teilkörper?

c) Friederike behauptet: Die Antwort auf diese Frage hängt nicht davon ab, in welchen Abständen von den gefärbten Seitenflächen (statt jedes Mal 20 cm) man den Würfel durchgesägt hatte. Maximilian sagt: Doch, davon hängt die Antwort ab. Wer hat Recht?

Aufgabe 430633 (26%)

Katja möchte für ihre Freunde ein Memory-Spiel basteln. Dazu hat sie drei quadratische Muster entworfen und malt sie dann aus. Dabei sollen aneinander liegende Bereiche nicht mit der gleichen Farbe ausgemalt werden (siehe Abbildung A430633).

a) Diese drei Karten sollen nun mit jeweils drei Farben ausgemalt werden. Wie viele verschiedene Memory-Karten erhält sie dann insgesamt?



Karte 1 Karte 2 Karte 3

Abbildung A430633

b) Dann nimmt sie nur die Karte 1 und benutzt 4 Farben. Wie viele verschiedene Memory-Karten erhält sie, die jeweils drei Farben tragen?

c) Wieder nimmt sie die Karte 1 und benutzt diesmal 5 Farben. Wie viele verschiedene dreifarbige Memory-Karten erhält sie jetzt? Finde die Anzahl ohne die Karten aufzumalen.

d) Ermittle rechnerisch die Anzahl der verschiedenen dreifarbigen Memory-Karten, wenn Katja die Karten 1 und 3 nehmen und für das Ausmalen 8 Farben benutzen würde.