Hinweise zur Lösungsfindung und Darstellung der Lösung
Teil 1

Sach- und Anwendungsaufgaben

Allgemeiner Hinweis:
Beim Lösen der Aufgaben S1) bis S10) können folgende Impulse nützlich sein:
Wähle günstige *Bezeichnungen* und übersetze die Aufgabe in die *Sprache der Gleichungen*.
Löse die Gleichung; die „Rückübersetzung“ liefert dann den *Antwortsatz*.
Auch wenn derartige Aufgaben (bei geringem Schwierigkeitsgrad) durch *Probieren* gelöst werden können, sollte man dies in Klassenstufe 7/8 ersetzen durch das effektivere *Folgern aus den gegebenen Bedingungen*.

3) Wenn der Schüler die Aufgaben S1) oder S2) durch systematisches Probieren gelöst hat, dann sollte man ihn anhand der zugehörigen Lösungen mit der Methode *„Übersetzen in die Sprache der Gleichungen mit Variablen“* vertraut machen und von ihm fordern, ab Aufgabe 3) diese Methode zu verwenden.

5), 6) und 8) Wenn der Schüler noch Schwierigkeiten beim Lösen von Gleichungen hat, dann soll er aus dem Material „Einige mathematische und logische Grundlagen“ für Schüler der Klassen 6/7 den Abschnitt *„Lösen von Gleichungen“* durcharbeiten.

7) Wenn der Schüler beim Lösen von Bewegungsaufgaben noch Schwierigkeiten hat, dann soll er die im Material für Kl. 6/7 angegebene Hinweise auf *„Tabellen und Skizzen als heuristische Hilfsmittel“* durcharbeiten.

8) Wenn der Schüler beim Lösen von Leistungsaufgaben noch Schwierigkeiten hat, dann soll er die im Material für Kl. 6/7 angegebenen Abschnitt *„Leistungsaufgaben“* durcharbeiten.

9) Die Formulierung „Untersuche ob es möglich ist,…“ signalisiert, dass die beiden *Lösungsteile I. und II.* erforderlich sind.

10) Übersetze in die *Sprache der Gleichungen*.

11) *Einfachere Fälle* untersuchen und dabei *Gesetzmäßigkeiten entdecken*.

12) Durch Betrachten einiger Schritte zunächst zur *Vermutung* gelangen.
Hinweis auf die Notwendigkeit der *Lösungsteile I. und II.*

Zahlentheorie

1) p ist 18-stellig genau dann, wenn $10^{17} \leq p < 10^{18}$ gilt.
Daher ist es günstig, p so *abzuschätzen*, dass eine Zehnerpotenz vorkommt.
Man sollte die Möglichkeit nutzen, den Schüler hier mit den *Potenzgesetzen* bekannt zu machen (siehe das 1. Beiblatt zum KZM8).

2) Solche Gleichungen lassen sich auch durch *systematisches Probieren* lösen, indem man die Gleichung nach einer der beiden Variablen auflöst (wobei man sich entscheiden muss, welche der beiden Möglichkeiten die günstigere ist, in diesem Fall nach x) und dann untersucht, für welche Werte 1, 2, 3, … der anderen Variablen die Gleichung erfüllt wird.
Eine derartige Lösung ist zu akzeptieren.
Der Schüler sollte jedoch aufgefordert werden, die angegebene Lösung durchzuarbeiten. Die Vorteile des hier verwendeten Verfahrens des *Folgerns aus den gegebenen Bedingungen* gegenüber den Nachteilen des systematischen Probierens sind zu erläutern.

Der Schüler soll sich einprägen: Wenn gefordert wird „*Ermittle alle…“*, dann sollte er die Darstellung „I. …, II. …, Aus I. und II. folgt …“ wählen.
Derartige Gleichungen heißen diophantische Gleichungen. Auf das Lösen von diophantischen Gleichungen wird im Teil 2 eingegangen.

3) „Welche n-stelligen Zahlen kommen nur in Frage? Begründe!“
Es ist leicht zu erkennen, dass nur zweistellige Zahlen in Frage kommen. Das Begründen muss jedoch erlernt werden.
Bei dieser Aufgabe ist es sinnvoll, zunächst durch *systematisches Probieren* nach Lösungen zu suchen.
Hierzu eignet sich eine Tabelle mit den Spalteneingängen $n \mid n\cdot\overline{n} \mid p(n) \mid n\cdot\overline{n} - p(n) \mid = 1000$?.
Man erkennt, dass man nur die Fälle $n \in \{16, 17, 23, 24, 32, 33, 41, 42, 51, 52, 61, 62, 71\}$ angeben muss, um nachzuweisen, dass genau die Zahlen 24 und 42 Lösungen sind.
Dennoch sollte man versuchen, beim Schüler den Ehrgeiz zu erwecken, die Lösung in Form des Folgern aus den Bedingungen und in der Form „ I. ..., II. ... . Aus I. und II. folgt …“ darzustellen.

4) Welche besondere Eigenschaft hat diese Gleichung? [Symmetrie]
Was lässt sich daraus folgern?
Versuche, die Aufgabe zunächst für einen *Spezialfall* zu lösen.
Um zu einer einfacheren Gleichung mit nur zwei Variablen zu gelangen, deren Lösungspaare sich durch *systematisches Probieren* ermitteln lassen, kann man z.B. z = 1 wählen. Dies führt zu den Lösungen (2; 5; 1), (3; 3; 1) und (5; 2; 1) der Ausgangsgleichung.
Für z = 2 erhält man die Lösungen (1; 5; 2), (5; 1; 1) und (2; 2; 2).
Nur wenn man bereits die Symmetrie der Gleichung erkannt hat, kann man jetzt „vorhersagen“, dass z = 3 die Lösungen (1; 3; 3) und (3; 1; 3) liefern wird.

5) Außer der angegebenen Lösung gibt es noch eine weitere (allerdings nicht so kurze und elegante) naheliegende Lösung:
Nach Aufgabenstellung gilt $\overline{bcdefa} = 3\,\overline{abcdef}$.
Aus a = 1 folgt f = 7, weil nur 3·7 auf die Einerziffer 1 endet.
Da hier der Übertrag 2 auftritt, folgt aus f = 7, dass e = 5 gelten muss, da nur in diesem Fall (3·5 + 2) auf 7 endet, usw.
Wenn die Schüler das *Rechnen mit Kongruenzen* beherrschen, ist auch eine korrekte Darstellung einer solchen Lösung kein Problem.
Wenn der Schüler eine solche Lösung findet, sollte er die Musterlösung dennoch durcharbeiten, um sich mit der dort angewendeten Lösungsmethode vertraut zu machen.

6) Hier ist offensichtlich, dass nur *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* zum Ziel führen kann. Dabei muss man überlegen, mit Hilfe welcher zwei Gleichungen man *eine Variable eliminieren* kann.
Um die entstehende quadratische Gleichung (ohne die Lösungsformel) zu lösen, kann man auch von x(x + 1) = 12 ausgehen und alle möglichen Faktorzerlegungen untersuchen.

7) „Wähle *günstige Variable* und übersetze den Sachverhalt in die *Sprache der Gleichungen.* [Nicht für die vier Ziffern sondern für die beiden zweistelligen Zahlen Variable einführen.]“
„Löse die Gleichung nach jeder der beiden Variablen auf und untersuche, welche der so umgeformten Gleichungen *mehr Informationen* liefert. [Das Auflösen nach x ist günstiger.]“

8) Es liegt nahe, die dreistellige Zahl in der Form $z = \overline{ab5} = 100a + 10b + 5$ darzustellen. Dies führt jedoch in eine *Sackgasse*.
Hier lohnt es, zunächst die *einfachere Aufgabe* für zweistellige Zahlen zu lösen, was zu dem oben angegebenen Beweis führt.
So kann man erkennen, dass man für beliebige derartige Zahlen die hier *günstige Darstellung* $z = \overline{x5} = 10x + 5$ wählen sollte.

9) Der Teil a) ist leicht, der Teil c) dagegen vermutlich von kaum einem Schüler selbständig zu bewältigen. Man sollte dem Schüler helfen, die Teile b) und c) durchzuarbeiten.
Bei Teil b) liegt es nahe, die Summenbildung spaltenweise vorzunehmen.
Bei dieser Gelegenheit sollte man nicht versäumen, die *Methode zum Berechnen der Summe einer endlichen arithmetischen Reihe* zu wiederholen, etwa am Beispiel von Summanden der Form (19 + 3k)

$$\begin{aligned} s &= 19 + 22 + 25 + \ldots + 55 + 58 + 61 \qquad \text{(15 Summanden)} \\ \underline{s} &\underline{= 61 + 58 + 55 + \ldots + 25 + 22 + 19} \\ 2s &= 80 + 80 + 80 + \ldots + 80 + 80 + 80 \\ 2s &= 15 \cdot 80 \\ s &= 600 \end{aligned}$$

Mit dieser Methode ist Teil a) wie folgt leicht lösbar:

$$\begin{aligned} 11 + 12 + 13 + \ldots + 18 + 19 &= \tfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 30, \\ 21 + 22 + 23 + \ldots + 28 + 29 &= \tfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 50, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad & \quad , \\ 91 + 92 + 93 + \ldots + 98 + 99 &= \tfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 190. \end{aligned}$$

Folglich gilt $s_2 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot (3 + 5 + \ldots + 19) = 9 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 22 = 9^2 \cdot 5 \cdot 11 = 4455.$

Kombinatorik / Logik

1) *Günstige Bezeichnungen* einführen; *Tabellen* für das Festhalten von Zuordnungen verwenden; *Folgern* aus den (nummerierten) Bedingungen.

2) Hilfestellung beim selbständigen *Erwerb von Wissen* aus dem Beiblatt „Kombinatorik“ des Arbeitsmaterials zum KZM8; Aneignen der *Definitionen* von „Permutation“, „Kombination“, „Variation“, „Fakultät“ sowie der zugehörigen *Formeln*; Anwendung der Formeln beim Lösen von Aufgaben.

3) Richtige Formel finden und anwenden (Kombinationen).

4) Bei den Teilen a) und b) führt die *Formel* für die Anzahl der *Variationen* zum Ziel; bei Teil c) muss eine *Beziehung* gefunden werden, in der die *Hilfsgröße* V_6^3 vorkommt.

5) Hier führt die *Formel* für die Anzahl der *Variationen* zum Ziel.
Bei der Lösungsvariante führt *Folgern* und *systematisches Ermitteln aller Möglichkeiten* zum Ziel.

6) Folgern aus den gegebenen Bedingungen.
Lösungsvariante: Richtige Formel finden und anwenden (Kombinationen).

7) Hier reicht die Kenntnis der von uns verwendeten drei Formeln nicht aus. Wichtig ist, dass der Schüler solche Aufgaben wie hier angegeben durch *Folgern* lösen kann.

8) Den ersten Zug durchführen und auswerten.

Geometrie

1) Einer hinreichend genau gezeichneten *Figur* ist die *Vermutung* zu entnehmen, dass die Dreiecke DEA und DCF gleichseitig sind und dass die Dreiecke EAB, BCF und EDF zueinander kongruent sind.
Das legt es nahe, die Gleichseitigkeit des Dreiecks BFE aus der *Gleichheit der drei Seiten* (und nicht etwa aus zwei 60°-Winkeln oder aus zwei gleich langen Seiten und einem 60°-Winkel) herzuleiten.

2)
Teil a): Die *Hilfsmittelfrage beim Vorwärtsarbeiten* („Mit welchem Hilfsmittel lassen sich die Winkel aus den Voraussetzungen wohl am einfachsten berechnen?") führt zum Innenwinkelsatz.
Am besten geeignet ist das Dreieck ADE, weil sich hier der dritte Winkel durch den Nebenwinkelsatz berechnen lässt. Geschickter ist es, die benötigte Gleichung sofort mit Hilfe des Außenwinkelsatzes zu ermitteln.
Das Berechnen von γ mit Hilfe des Innenwinkelsatzes für das Dreieck ABC liegt dann sehr nahe.

Teil b): Naheliegende *Hilfslinie*? ($\overline{BF}$; es entsteht das gleichschenklige Dreieck ABF und es gilt $|\sphericalangle FBA| = \alpha$.)
Die *Teilzielfrage beim Rückwärtsarbeiten* („Woraus lässt sich die Behauptung wohl am einfachsten herleiten?") führt zu $\alpha < \beta$ und zu Feststellung (1), mit deren Hilfe sich dann α eliminieren lässt.

Teil c): Hier führt die *Hilfsmittelfrage* zu den Feststellungen (1) und (2), aus denen sich die gesuchte Winkelgröße ermitteln lässt.

Teil d): Die Aufforderung „Untersuche ob ... „ weist darauf hin, dass ein Einzigkeitsnachweis I. und ein Existenznachweis II. erforderlich sind. Falls das der Schüler nicht (mehr) weiß, soll er im Material KZM7 den Abschnitt „1.5. Das Lösen von Bestimmungsaufgaben" durcharbeiten.

3) Der Schüler sollte zum Durcharbeiten der Sätze über „Kreis und Winkel" motiviert und angeleitet werden, wenn diese Sätze im Unterricht noch nicht behandelt wurden.
Beim Teil c) dürften viele Schüler der Ansicht sein, dass „offensichtlich" die Punkte B und D auf dem Umkreis wandern, wenn sich M_i auf M zubewegt, und dass dabei das Drachenviereck in ein Quadrat übergeht, wenn M_i den Punkt M erreicht hat. Hier sollte man die Möglichkeit nutzen, dem Schüler zu erklären, warum diese auf der Anschauung basierende Überlegung einen Beweis nicht ersetzen kann.
Um zugehörige Punkte bei ungleichsinnig kongruenten Dreiecken deutlich erkennen zu können, ist die Reihenfolge der Bezeichnung der Punkte nicht immer positiv orientiert.

4) Da es in Teil a) um Inhalte von Dreiecken geht, ist die Höhe $\overline{AH}$ eine sehr nahe liegende *Hilfslinie* und der Beweis recht leicht.
Im Teil b) ist Flächenzerlegung und Flächenergänzung zwar ein nahe liegendes *Hilfsmittel*, das Finden einer Lösung jedoch anspruchsvoller.
Im Zusammenhang mit Teil c) achte man darauf, dass sich der Schüler anhand des angegebenen Materials die Begriffe *Verallgemeinerung* und *Spezialisierung* tatsächlich aneignet.

5) Hier ist es günstig, zunächst durch Untersuchung von *Spezialfällen* zu einer *Vermutung* zu gelangen. Das Auflösen der *Gleichung*, welche die Voraussetzung festhält, nach einer der beiden Variablen ist nahe liegend.
Die einfachsten beiden Fälle lassen sich in folgender *Tabelle* festhalten:

a	b	A_1	u_1	a - 2	b - 2	A_2	u_2
3	6	18	18	1	4	**4**	10
4	4	16	16	2	2	**4**	8

Dies führt zur Vermutung $A_2 = 4$ und gestattet auch die Suche nach Rechenfehlern durch zwei *Proben an Spezialfällen*: u(3) = 2·5 = 10 und u(4) = 2·4 = 8.

6) Bei den in „Beweismittel ...“ unter „a = b“ angegebenen 11 Hilfsmitteln kommen offensichtlich nur „1) Entsprechende Seiten in kongruenten Dreiecken“ oder „2) $\alpha = \beta$“ in Frage, wobei „2)“ vermutlich besser geeignet ist.
Bei dieser Aufgabe führt daher die *Hilfsmittelfrage beim Rückwärtsarbeiten* zur Umkehrung des Basiswinkelsatzes und daher zum *hinreichenden Teilziel* $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle ADE| = \alpha$.
Die *Teilzielfrage beim Vorwärtsarbeiten* führt relativ einfach zu den abgeleiteten Feststellungen (1) und (2) und dann über (3) und (4) zu (B).

7) Da es um den Nachweis der Inhaltsgleichheit von Parallelogrammen geht, kann die *Hilfsmittelfrage beim RA* zur *Scherung* als inhaltstreuer Abbildung als Hilfsmittel führen. $PECF_1$ erweist sich dabei als Bild von PFED und AH_1PG als Bild von HBPG.
Auf diese Weise hat man die Aufgabe auf eine *leichter lösbare* (oder sogar auf eine bereits gelöste) *Aufgabe zurückgeführt*, die sich mit Hilfe von *Flächenzerlegungen* lösen lässt.
Lösungsvariante:
Einer genau gezeichneten Figur kann man die *Vermutung* entnehmen, dass die eingefärbten Dreieckspaare kongruent sind.
Die *Hilfsmittelfrage beim RA* führt dann über die Kongruenzsätze zu den Sätzen mit der Behauptung $\alpha = \beta$ und a = b.

8) Die Behauptung weist auf kein erfolgversprechendes Hilfsmittel hin. Also wird man *Vorwärtsarbeiten* mit dem Ziel, nach Auswahl günstiger *Hilfswinkel* die gesuchten Winkel durch diese auszudrücken in der Hoffnung, so deren Gleichheit nachzuweisen.
Die *Hilfsmittelfrage beim VA* weist (wegen V_2) auf den Satz des Thales und (wegen V_3) auf den Basiswinkelsatz hin. Selbstverständlich liegt auch die Verwendung von Innenwinkel- und Außenwinkelsatz nahe.
„*Suche nach Gleichungen zwischen den gesuchten und den ausgewählten Hilfswinkeln!*“
Die Aufgabe ist deshalb besonders interessant, weil es sehr viele derartige Gleichungen gibt und es möglich ist, durch eine geschickte Auswahl zu *zwei* verschiedenen *Beweisen* zu gelangen.
Hinweis:
Im ursprünglichen Entwurf der Lösung kam noch die Zeile „V_1, (2) $\Rightarrow$ (3*) $|\sphericalangle AGB| = \alpha_1$“ vor. Eine Nachprüfung ergab, dass (3*) nicht benötigt wird und dass diese Zeile daher gestrichen werden kann.
Würde V_4 nicht auftauchen, dann müsste man nachträglich untersuchen, in welchen Zeilen $E \in \overline{BG}$ und/oder $F \in \overline{BG}$ tatsächlich benötigt werden.
Bei solchen Untersuchungen kann die Darstellung eines Beweises in Form eines *Beweisschemas* sehr hilfreich sein.