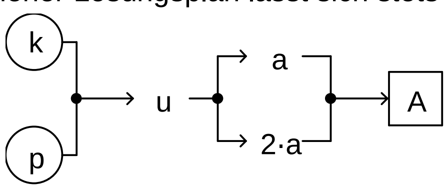
Hinweise zur Lösungsfindung und Darstellung der Lösung
Teil 1

S a c h a u f g a b e n

Aufgabe 1)
Bei dieser Aufgabe ist es günstig, den Text in die „*Sprache der Gleichungen/Ungleichungen*“ zu übersetzen.
Im Prozess der Lösungsfindung ist es durchaus sinnvoll, zunächst durch *„Probieren“* Zahlenpaare (s; h) zu suchen, welche die Gleichung (1) erfüllen und aus diesen „lösungsverdächtigen“ Paaren diejenigen auszusondern, welche die Ungleichungen (2) oder (3) nicht erfüllen. Auf diese Weise kann man durchaus die beiden Lösungen finden.
Bei diesem Probieren kann man einige nützliche Erfahrungen sammeln und beim Darstellen der Lösung ausnützen:
Es ist günstig, Gleichung (1) nach einer der beiden Variablen aufzulösen. Hier erweist sich das Auflösen nach s als die günstigere Möglichkeit, weil man dann sofort erkennt, dass h eine gerade Zahl ist.
Es ist günstig, das Überprüfen der lösungsverdächtigen Zahlenpaare mit der „schärferen“ Bedingung (3) zu beginnen, weil man dann sofort erkennt, dass nur die ersten beiden Paare diese Bedingung erfüllen, während die Bedingung (2) von allen lösungsverdächtigen Paaren erfüllt wird.

Aufgabe 2)
Wem es nicht sofort gelingt, durch *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* einen Lösungsweg zu finden, der sollte es mit *Rückwärtsarbeiten* versuchen und sich folgende Fragen stellen:
Was ist gesucht? [der Flächeninhalt A]
Was ist gegeben? Günstige Variable einführen! [die Kosten k; der Preis p; $b = 2\cdot a$]
Woraus ließe sich das gesuchte A unmittelbar berechnen? Begründung!
[A ließe sich aus der Seitenlänge a berechnen, weil $A = a\cdot b = a\cdot(2\cdot a)$ gilt.]
Woraus ließe sich a unmittelbar berechnen? Begründung!
[a ließe sich aus dem Umfang u berechnen, weil $u = 2\cdot(a + b) = 2\cdot(a + 2\cdot a)$ gilt.]
Wie lässt sich u aus dem Gegebenen berechnen? [Es gilt $u\cdot p = k$.]
Ein so gewonnener Lösungsplan lässt sich stets in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten:



Aufgabe 3)

Variable einführen! [Anzahl x der Nüsse]
Welche Anzahlen lassen sich durch x ausdrücken?

Verbrauch	Rest
$\frac{3}{4}$x Nüsse selbst gefressen	$(1 - \frac{3}{4} =)\ \frac{1}{4}x$
$\frac{2}{3}$ vom Rest = $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}x = \frac{1}{6}x$ von anderen gefressen	$(1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{6} =)\ \frac{1}{12}x$
$\frac{9}{10}$ vom Rest = $\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{12}x = \frac{3}{40}x$ Nüsse verfaulen	2 Nüsse, aus denen Bäume wachsen

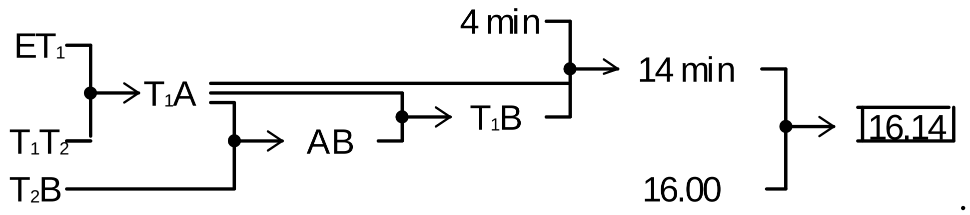
Welche *Gleichung* muss gelten? [Die Summe aller Anteile muss x ergeben.]

Aufgabe 4)

Variable einführen; *Folgern* aus den gegebenen Bedingungen; *Gleichung* aufstellen und lösen.

Aufgabe 5)

Der Lösungsplan lässt sich wie folgt in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten:



Bei einem *Lösungsgraphen* sind die *„Eingangsknoten“* mit den *gegebenen Größen* belegt, der *„Endknoten“* ist mit der *gesuchten Größe* und die restlichen Knoten mit den *abgeleiteten Größen* belegt.
Auf diese Weise lässt sich ein *Lösungsplan* festhalten sowie das *Rückwärtsarbeiten (RA)* und das *Vorwärtsarbeiten (VA)* beim Suchen nach einer Lösung veranschaulichen.

RA: Woraus ließe sich die gesuchte Uhrzeit unmittelbar berechnen?
[aus der gegebenen Uhrzeit 16.00 Uhr und der Zeit, in welcher der Zug die Strecke $\overline{T_1B}$ durchfährt]

RA: Woraus ließe sich diese Fahrzeit unmittelbar berechnen?
[Auf jeden Fall benötige ich die Länge der Strecke $\overline{T_1B}$ und Informationen über die Geschwindigkeit.]

VA: Was lässt sich aus den gegebenen Größen unmittelbar berechnen?
[Aus den gegebenen Längen $\overline{T_1T_2}$ des Tunnels und $\overline{ET_1} = \overline{T_2A}$ des Zuges lässt sich die Länge der Strecke $\overline{T_1A}$ berechnen.]

VA: Was lässt sich dann aus den gegebenen und den abgeleiteten Größen berechnen?
[Aus $\overline{T_2B}$ und $\overline{T_1A}$ lässt sich $\overline{AB}$ berechnen, aus $\overline{T_1A}$ und $\overline{AB}$ lässt sich die durch RA gefundene *hinreichende Hilfsgröße* $\overline{T_1B}$ berechnen; usw.]

Aufgabe 6)

Um zu untersuchen, ob eine Aufgabe eindeutig lösbar ist, wird man wie üblich nach *allen* Lösungen der Aufgabe suchen, darf aber abbrechen, wenn man zwei verschiedene Lösungen gefunden hat.
In diesem Fall muss man nicht angeben, wie man die beiden Lösungen gefunden hat, sondern es genügt deren Angabe nebst Probe (Existenznachweis).
Bei der Suche nach Lösungen ist es günstig, beim Folgern mit derjenigen Bedingung beginnen, die vermutlich *„die meisten Informationen enthält“*. Hier dürfte dies die Bedingung (e) sein, weil man aus dem Alter e von Eva wegen (b) und (d) unmittelbar das Alter d von Dorothee und das Alter c von Carsten berechnen kann.

Aufgabe 7)

Wer die Lösung des Teils a) nicht sofort durch *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* findet, sollte sich die Situation durch eine *Skizze* veranschaulichen, wie dies in der Lösung von Aufgabe 5) geschieht.
Erfahrungsgemäß lösen einige Schüler derartige Aufgaben auch durch *Probieren*. So könnte man die Entfernungen der Fahrzeuge von A zu verschiedenen Uhrzeiten wie folgt berechnen und in einer *Tabelle* festhalten:

Uhrzeit	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	10.20	10.40	11.00	11.20
Entfernung Traktor	5 km	15 km	25 km	35 km	**45 km**			55 km	
Entf. Radfahrer	0 km	0 km	15 km	30 km	**45 km**	50 km	55 km	60 km	**65 km**
Zeitvorsprung des Radfahrers					0 min	10 min	20 min	30 min	**40 min**

Man sollte den Schülern jedoch klar machen, dass eine derartige Lösungsmethode in Klasse 7 unangemessen ist und dass eine derartige Tabelle eine korrekt dargestellte Lösung durch begründetes Folgern aus den gegebenen Bedingungen nicht ersetzen kann.

Aufgabe 8)

Bezeichnet man mit A eine zu erledigende Arbeit, mit t_1 und t_2 die (z.B. in Stunden gemessene) Zeit, die jede von zwei Personen hierfür einzeln benötigt und mit t die Zeit, die sie zusammen benötigen, dann gilt die Gleichung $\frac{A}{t_1} + \frac{A}{t_2} = \frac{A}{t}$, die durch Division beider Seiten durch A ($\neq$ 0) zu $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t}$ vereinfacht werden kann. Dabei spielt es keine Rolle, ob A im Mähen einer Wiese, dem Abtransport einer bestimmten Menge von Material, dem Füllen eines Fasses mit Wasser u.Ä. bedeutet.

Aufgabe 9)

Man kann die Aufgabenstellung wie nebenstehend angegeben in einer *Tabelle* festhalten.

	Weg (in km)	Geschw. (in km/h)	Zeit (in h)
von A bis E		5	
von T bis E		40	
von A bis E	30	XXXXX	1,5

Dann füllt man die leeren Felder, indem man die in Zeilen- bzw. Spaltenrichtung geltenden Beziehungen nutzt. Hierbei sind verschiedene Reihenfolgen möglich.
Sind alle Felder gefüllt, dann gibt es stets noch eine Beziehung, welche die *Ansatzgleichung* liefert.
Die linke Tabelle liefert den oben angegebenen Lösungsweg, die beiden anderen Tabellen zwei weitere Lösungswege mit unterschiedlichen Ansatzgleichungen.
Es gibt noch eine 4. Ansatzgleichung. Wie lautet sie?

x	5	$\frac{x}{5}$ (1)
60 - 8x (3)	40	$1{,}5 - \frac{x}{5}$ (2)
30	XX	1,5

$$x + (60 - 8x) = 30$$

x	5	$\frac{x}{5}$ (2)
30 - x (1)	40	$\frac{30-x}{40}$ (3)
30	XX	1,5

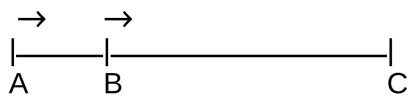
$$\frac{x}{5} + \frac{30-x}{40} = 1{,}5$$

x	5	$1{,}5 - \frac{30-x}{40}$ (3)
30 - x (1)	40	$\frac{30-x}{40}$ (2)
30	XX	1,5

$$x = 5(1{,}5 - \frac{30-x}{40})$$

Aufgabe 10)

Man kann die Situation bei Abfahrt des PKW durch eine *Skizze* veranschaulichen.



Man erkennt, dass hier die *allgemeine Beziehung* s = v · t eine entscheidende Rolle spielt.
Man kann daher eine *Tabelle* mit den Spalteneingängen s, v, t anfertigen und in den Zeileneingängen wichtige „Situationen" festhalten.
Man trägt das *Gegebene* in die entsprechenden Felder ein und kennzeichnet das *Gesuchte* (etwa durch „rote“ Umrahmung der entsprechenden Felder).
Dann führt man für eine der gesuchten Größen eine *Variable* ein (z.B. die Variable v_1) und versucht, die noch leeren Felder der Tabelle mit Hilfe der durch die Aufgabenstellung gegebenen Beziehungen zu füllen (in Zeilenrichtung m. H. der allgemeinen Beziehung, in Spaltenrichtung m. H. gegebener "spezieller" Beziehungen).

Wegen $t_2 = t_1 - \frac{1}{2}$ kann man das rechte untere Feld mit "$\frac{55}{60}$" füllen;
wegen $v_2 = v_1 + 25$ kann man das mittlere untere Feld mit $(v_1 + 25)$ füllen;
wegen $s = v \cdot t$ kann man dann auch die Felder in der 1. Spalte füllen.
Abschließend sucht man nach einer *noch nicht verwendeten Beziehung*, die dann die *Ansatzgleichung für die eingeführte Variable* liefert.
Hier ist dies die Beziehung $s_1 = s_2$.

	s (in km)	v (in km/h)	t (in h)
LKW auf $\overline{AC}$		v_1	$\frac{85}{60}$
PKW auf $\overline{AC}$			

	s (in km)	v (in km/h)	t (in h)
LKW auf $\overline{AC}$	$\frac{85}{60} \cdot v_1$	v_1	$\frac{85}{60}$
PKW auf $\overline{AC}$	$\frac{55}{60}\,(v_1+25)$	$v_1 + 25$	$\frac{55}{60}$

Auftrag: Suche nach weiteren Lösungswegen, indem du z.B. v_2 oder s_1 oder s_2 als Variable einführst.
Wie lauten die entsprechenden Ansatzgleichungen?

Aufgabe 11)

Hier kann eine *Tabelle* helfen, die Ansatzgleichung zu finden. Die hier geltende allgemeine Beziehung lautet

gefördertes Wasservolumen = Leistung · benötigte Zeit.

Sie liefert die Spalteneingänge der Tabelle. Die Zeilen werden so gewählt, dass man die gegebenen Größen und die gesuchte Größe in die Felder der Tabelle eintragen kann. In unserem Fall wird man die Betriebzeiten der beiden Pumpen aus den gegebenen Einschalt- und Ausschaltzeiten durch eine *Nebenrechnung* ermitteln.

	gefördertes Wasservolumen (in l)	Leistung (in l/min)	Zeit (in min)
1. Pumpe		750	x - 10
2. Pumpe		500	x - 30
Gesamt	135000		x

Dann füllt man die Felder der Tabelle unter Verwendung der gegebenen allgemeinen Beziehung (in Zeilenrichtung) oder der gegebenen speziellen Beziehungen (in Spaltenrichtung). Eine der hierbei *nicht verwendeten Beziehungen* liefert dann die *Ansatzgleichung*. (In unserem Fall ist dies die spezielle Beziehung $V_1 + V_2 = V$.)

	gefördertes Wasservolumen (in l)	Leistung (in l/min)	Zeit (in min)
1. Pumpe	750(x - 10)	750	x - 10
2. Pumpe	500(x - 30)	500	x - 30
Gesamt	135000		x

Summe der geförderten Teilvolumina = Gesamtvolumen

$$750(x - 10) + 500(x - 30) = 135000$$

Aufgabe 12)

Bei derartigen Aufgaben ist es oft nützlich, die *gegebenen*, die *gesuchten* und günstig gewählte *Hilfsgrößen* übersichtlich in einer *Tabelle* festzuhalten.
Dieser Aufgabe liegt die *allgemeine Beziehung* „Arbeit gleich Leistung mal Zeit" zugrunde. Die hier vorkommenden Größen wähle man als *Spalteneingänge* der Tabelle.
Die *Zeileneingänge* wähle man so, dass man in den Feldern der Tabelle die gegebenen und die gesuchten Größen festhalten kann.
In unserem Fall wird man die Betriebzeiten der beiden Pumpen aus den gegebenen Einschalt- und Ausschaltzeiten durch eine *Nebenrechnung* ermitteln.
Dann trägt man die gegebenen Größen in die Tabelle ein und kennzeichnet die Felder, in denen die gesuchten Größen stehen (etwa durch „rote" Umrahmung).
Dies führt in unserem Fall zu folgendem Resultat:

	Arbeit A (in m³)	Leistung P (in m³/h)	Zeit t (in h)
1.Pumpe			4
2.Pumpe			3
zusammen	50		

Nun entscheidet man sich, für welche gesuchte Größe oder für welche Hilfsgröße man eine *Variable* einführt.
Hier empfiehlt es sich, die Leistung P_1 der 1. Pumpe mit x zu bezeichnen.
Nun versucht man, die noch *leeren Felder* unter Verwendung der gegebenen *allgemeinen* oder *speziellen Beziehungen* mit Termen *auszufüllen*:
Leistung der 2. Pumpe: 2x; Arbeit der 1. Pumpe: 4x; Arbeit der 2. Pumpe: $3 \cdot 2x = 6x$.
In unserem Fall erweisen sich die Felder für „zusammen - Leistung" und „zusammen - Zeit" als uninteressant, was durch „---" gekennzeichnet wird.
Nun muss es (in Zeilen- oder Spaltenrichtung) noch eine *Beziehung* geben, die für das Füllen der Felder der Tabelle *noch nicht verwendet* wurde.
Diese Beziehung liefert die *Ansatzgleichung*.
Hier ist es die Beziehung (in Spaltenrichtung) „Gesamtarbeit gleich Summe der Teilarbeiten".
Diese Überlegungen führen zu folgendem Resultat:

	Arbeit A (in m³)	Leistung P (in m³/h)	Zeit t (in h)
1.Pumpe	4x	x	4
2.Pumpe	6x	2x	3
zusammen	50	---	---

$\uparrow$

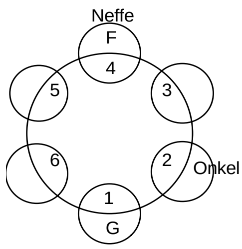
$4x + 6x = 50$

Das *Lösen der Ansatzgleichung* führt zu $x = 5$.
Nun kann man alle Felder der Tabelle mit Konstanten füllen, was für eine *"Probe am Text"* verwendet werden kann.

Auftrag:
Verfolge die Lösungswege, die sich ergeben, wenn man von $P_2 = x$ oder von $A_1 = x$ ausgeht und überzeuge dich, dass dies zu etwas komplizierteren Lösungswegen führt.
Ändere die Aufgabe dahingehend *ab*, dass nach der vollbrachten Arbeit A_2 der 2. Pumpe gefragt wird. Nun sind P_1, P_2 und A_1 *Hilfsgrößen*.
Ist es hier wiederum günstig, für die gesuchte Größe A_2 die Variable x zu setzen oder wäre es günstiger, für eine der Hilfsgrößen x einzuführen?

<u>Aufgabe 13)</u>

Hier ist eine *Skizze* und das Einführen der *Platznummern* sehr nützlich.
Ferner ist wichtig zu erkennen, *von welcher Bedingung ausgehend* man mit dem *Folgern* beginnen soll. Dies ist die Bedingung (c), gefolgt von der Bedingung (f) und der Bedingung (d).
Auch das Verwenden *abkürzender Bezeichnungen* ist hilfreich:
Aus G = 1 und (c) folgt On = 2 und Ne = 4.



L o g i k / K o m b i n a t o r i k

Aufgabe 1)

Günstige Bezeichnungen einführen; *Tabelle* anfertigen und die *unmittelbaren Folgerungen* aus (a) bis (d) *eintragen* (siehe linke Tabelle). Da dies noch nicht zum Ziel führt, muss man versuchen, in einem *zweiten Durchlauf* noch nicht verwendete Informationen zu finden, aus denen weitere Feststellungen gefolgert werden können. Das sind die in (a) und (b) enthaltenen Informationen über die Teilnahme an der vorjährigen MO. Dies führt zur Feststellung $k \neq B$ (siehe mittlere Tabelle) und zur Feststellung $a \neq D$ (siehe rechte Tabelle), was dann zum Ziel führt.

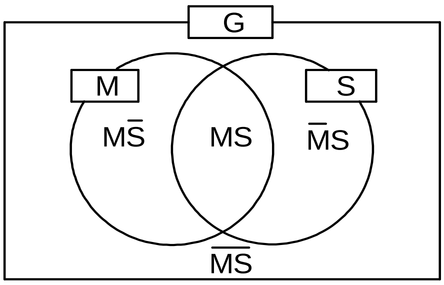
	B	D	H	S
a	- (a)			
c				
d	- (c)			
k		- (b)		- (d)

	B	D	H	S
a	-		- (2)	
c	+ (1)	- (1)	- (1)	- (1)
d	-		- (2)	
k	- (a),(b)	-	+ (2)	-

	B	D	H	S
a	-	- (a),(b)	-	+ (4)
c	+	-	-	-
d	-	+ (3)	-	
k	-	-	+	-

[Lies im Arbeitsmaterial auf S. 9 „Tabellen als Hilfsmittel beim Lösen von Zuordnungsaufgaben“.]

Aufgabe 2)



Bei derartigen Aufgaben sind *Mengendiagramme* ein günstiges Hilfsmittel. Man kann in ihnen nicht nur festhalten, welche Anzahlen von Elementen gegeben und welche gesucht sind sondern auch berechnete Anzahlen eintragen und vor allem die für die Lösung benötigten *Beziehungen* zwischen diesen Anzahlen ablesen.
Wichtig ist das Einführen günstiger *Bezeichnungen* sowie das Beherrschen der üblichen *mengentheoretischen Schreibweise.*

Hier werden die Beziehungen $M\overline{S} = M - MS$ und $G = MS + M\overline{S} + \overline{M}S + \overline{M}\overline{S}$ verwendet, die das Resultat G = 6 + 7 + 9 + 4 = 26 liefert.
[Lies im Arbeitsmaterial auf S. 9 den Abschnitt „Mengendiagramme“.]

Aufgabe 3)

Günstige Bezeichnungen einführen; eine mit Zeilen- und Spalteneingängen versehene *Tabelle* anfertigen und die unmittelbaren *Folgerungen* aus (a) und (b) eintragen (siehe linke Tabelle, der auch zu entnehmen ist, dass das „-“ im Feld b-H sowohl aus Bedingung (a) als auch aus Bedingung (b) folgt.)
An dieser Stelle gibt es zwei Möglichkeiten der Fortsetzung. Man kann sowohl das Feld d-H als auch das Feld b-F mit einem „+“ füllen.
Die *erste Möglichkeit* führt zu der mittleren der angegebenen Tabellen und zu der angegebenen Lösung, wobei man als weitere Lösungsvariante auch zuerst das Feld a-E mit „+(2*)“ und erst danach das Feld c-G mit "+(3*)" füllen könnte.
Die *zweite Möglichkeit* führt zu den in der rechten Tabelle festgehaltenen Feststellungen (1') und (2'), wobei es dann auch hier verschiedene Varianten gibt, die restlichen Felder der Tabelle zu füllen.
Auf diese Weise kann man durch *systematisches Erfassen aller möglichen Fälle* zu *vier verschiedenen Lösungswegen* gelangen.

	E	F	G	H
a			- (b)	- (b)
b	- (a)		- (b)	- (a);(b)
c	- (a)			- (a)
d				

	E	F	G	H
a	+ (3)	- (3)	-	-
b	-	+ (2)	-	-
c	-	- (2)	+ (2)	-
d	- (1)	- (1)	- (1)	+ (1)

	E	F	G	H
a	+ (2')	- (1')	-	-
b	-	+ (1')	-	-
c	-	- (1')		-
d		- (1')		

Beachte: Eine derartige Tabelle ist nur ein Hilfsmittel bei der Lösungsfindung, das auch den *Lösungsplan* festhält. Eine derartige ausgefüllte Tabelle kann aber eine exakte Darstellung der Lösung nicht ersetzen.
[Lies im Arbeitsmaterial auf S. 9 „Tabellen als Hilfsmittel beim Lösen von Zuordnungsaufgaben“.]

Aufgabe 4)

Bei dieser Aufgabe kann die nebenstehende *Tabelle* bei der *Lösungsfindung* sehr nützlich sein.
Der Formulierung „Weise nach, dass ...“ in der Aufgabe ist zu entnehmen, dass der Lösungstext die beiden *Nachweise I. und II.* enthalten muss.
Der Tabelle ist zu entnehmen, dass die Bedingung (f) für die Herleitung der Lösung nicht benötigt wird. Würde man in der Bedingung (f) die Farbe „rot“ durch die Farbe „grün“ ersetzen, dann würde unsere Aufgabe keine Lösung haben.
[Lies im Arbeitsmaterial auf S. 7 „Einige mathematische und logische Grundlagen“.]

	w	g	s	b	r
B	- (a)	- (b)	- (b)	- (c)	+ (1)
F	+ (5)	- (b)	- (b)	- (3)	- (1)
A	- (a)	- (d)	+ (4)	- (3)	- (1)
P	- (a)	- (d)	- (e)	+ (3)	- (1)
O	- (2)	+ (2)	- (2)	- (2)	- (1)

Aufgabe 5)

Da bei dieser Aufgabe eine Zuordnung der Elemente von drei Mengen {g, h, i}, {A, B, C} und {De, En, Fr} zu ermitteln ist, liegt es nahe, drei *Tabellen* als Hilfsmittel zu verwenden. Wenn man die unmittelbaren *Folgerungen* aus den Bedingungen (a), (b), (c) und (d) einträgt, erhält man folgendes Resultat (wobei die gefolgerten Feststellungen so bezeichnet werden wie in der angegebenen Lösung):

	A	B	C
g	- (a),(c)	- (b)	**+ (3)**
h	- (d)	**+ (5)**	- (3)
i	**+ (6)**	- (5)	- (3)

	De	En	Fr
g			- (b)
h		- (d)	
i			

	De	En	Fr
A		- (d)	
B			- (b)
C			

Damit hat man zunächst die Zuordnung zwischen Vornamen und Familiennamen gefunden.
Nun ist folgende Erkenntnis wichtig: Aus (b) haben wir B $\neq$ Fr erhalten, und wir haben auch (5) h = B abgeleitet. Daraus folgt h $\neq$ Fr, was wir in der 2. Tabelle festhalten.
Hieraus folgt dann (10) i = Fr, und wir haben damit die erste komplette Zuordnung ermittelt.
Nun kann man die 2. Tabelle recht einfach ausfüllen und auf diese Weise die restlichen beiden Zuordnungen erhalten.

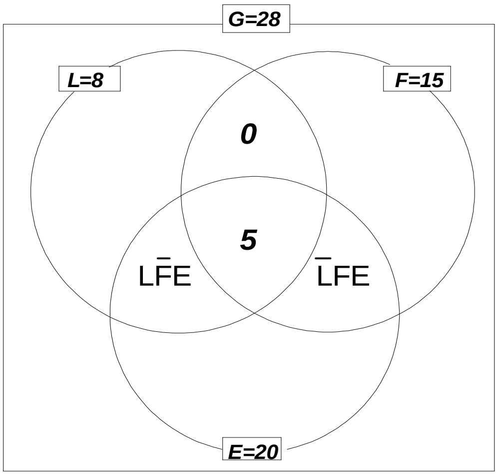
g	h	i
C	B	A
		Fr

	De	En	Fr
g	- (8)	**+ (9)**	- (b)
h	**+ (8)**	- (4)	- (b),(5)
i	- (10)	- (10)	**+ (10)**

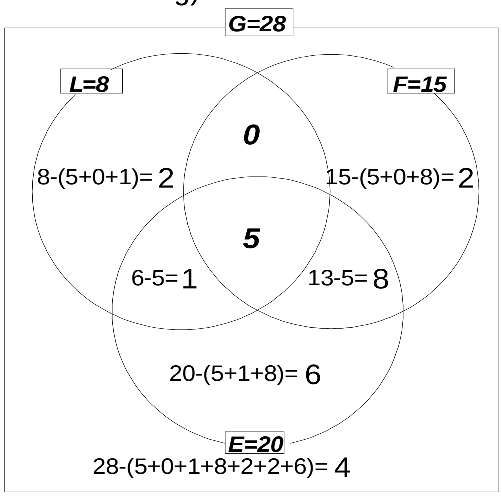
Der Formulierung „Untersuche, ob sich ... eindeutig ... ableiten lässt“ in der Aufgabe ist zu entnehmen, dass der Lösungstext die beiden *Nachweise I. und II.* enthalten muss.
Die Notwendigkeit von II. [*Existenznachweis* ("Probe")] erkennt man an der Aufgabe 6b). Man kann nie sicher sein, dass man bei I. [*Einzigkeitsnachweis* ("begründete Herleitung")] tatsächlich alle gegebenen Bedingungen in vollem Umfang verwendet hat. Es ist auch durchaus möglich, dass der Einzigkeitsnachweis mehr als eine "lösungsverdächtige" Zuordnung liefert. Wurde eine Bedingung nicht (oder nicht in vollem Umfang) für den Einzigkeitsnachweis benötigt, dann können zwei Fälle eintreten: Wenn eine "lösungsverdächtige" Zuordnung auch diese Bedingung erfüllt, dann ist sie tatsächlich eine Lösung; wenn sie diese Bedingung nicht erfüllt, dann ist sie keine Lösung.
[Lies im Arbeitsmaterial auf S. 9 „Tabellen als Hilfsmittel beim Lösen von Zuordnungsaufgaben“.]

Aufgabe 6)

Nach dem Einführen *günstiger Bezeichnungen* und dem Festhalten der Bedingungen in der *mengentheoretischen Kurzform* trägt man die gegebenen Anzahlen in ein *Mengendiagramm* ein. Da dies für die durch die Bedingungen (e) und (f) gegebenen Anzahlen nicht unmittelbar möglich ist, hält man sie gesondert fest (siehe linke Abbildung).

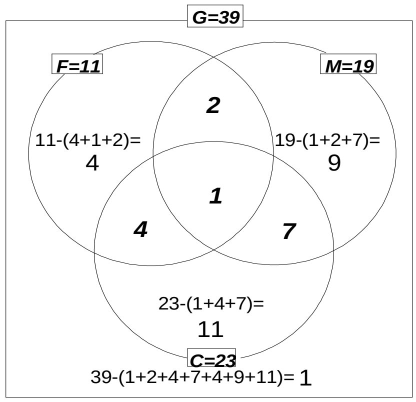


Geg.: LE = 6, FE = 13



Dann versucht man, durch *Vorwärtsarbeiten* die noch leeren Felder des Diagramms zu füllen. Die hierfür benötigten *Beziehungen* entnimmt man dem Mengendiagramm.
Wegen $LE = LEF + L\overline{F}E$ gilt $L\overline{F}E = 6 - 5 = 1$,
wegen $FE = LEF + \overline{L}FE$ gilt $\overline{L}FE = 13 - 5 = 8$, usw.
Dem rechts abgebildeten Diagramm ist unmittelbar zu entnehmen, dass genau 4 Schüler keine der drei Fremdsprachen lernen.
Folglich lernen (28 - 4 =) 24 Schüler mindestens eine der drei Fremdsprachen, usw.
[Lies im Arbeitsmaterial auf S. 9 „Mengendiagramme“]
{A, B, E} und {C, D, F}

Aufgabe 7)



Im nebenstehenden *Mengendiagramm* sind die gegebenen Anzahlen „kursiv-fett“ eingetragen. Um die in der Aufgabe gestellten Fragen beantworten zu können, müssen die in den restlichen Feldern stehenden Zahlen wie angegeben berechnet werden.
Der Formulierung „Weise nach, dass ... eindeutig ermitteln lassen“ in der Aufgabe ist zu entnehmen, dass der Lösungstext die beiden *Nachweise I. und II.* enthalten muss.

Aufgabe 8)

Zunächst führt man eine *geeignete Symbolik* ein. Wir kürzen die Mädchennamen mit Großbuchstaben, die Jungennamen mit Kleinbuchstaben ab, so dass eine Zuordnung zwischen $X \in \{B, C, D, E, I, M\}$ und $x \in \{a, f, g, h, j, k\}$ zu ermitteln ist.
Die gegebenen Bedingungen können dann wie folgt festgehalten werden:

(a) $x > X$;
(b) $a \neq C$, $a < B, E$;
(c) $j \neq B, C, E, I$;
(d) $h < f < a$, $f \neq B, C, D, I$;
(e) $g \neq C, E$;
(f) $k < f$.

Dabei bedeutet $a \neq C$, dass Anton nicht mit Christina tanzt, und $a < B, E$ bedeutet, dass Anton kleiner ist als Birgit und auch kleiner als Eva. Ferner ist es günstig, die gegebenen Bedingungen und die Folgerungen in einer *Tabelle* übersichtlich festzuhalten.
In der linken Tabelle sind die durch die einzelnen Bedingungen unmittelbar gegebenen Beziehungen festgehalten, die man beim ersten Durchlesen so in die Tabelle eintragen kann.

Beim zweiten Durchlesen untersucht man, was sich aus zwei oder mehreren Bedingungen unmittelbar folgern lässt.
Aus (b) und (d) folgt $h, f, a < B, E$, zusammen mit (a) also (1) $h, f, a \neq B, E$. Diese 6 Beziehungen werden in die Tabelle eingetragen (siehe rechte Tabelle).

	a	f	g	h	j	k
B		- (d)			- (c)	
C	- (b)	- (d)	- (e)		- (c)	
D		- (d)				
E			- (e)		- (c)	
I		- (d)			- (c)	
M						

	a	f	g	h	j	k
B	- (1)	- (1)		- (1)	-	
C	-	-	-	-		
D		-				
E	- (1)	- (1)	-	- (1)	-	
I		-		-		
M		+ (2)				

Dabei fällt zweierlei auf: Weder die in (d) gegebene Beziehung $h < f$ noch die in (d) gegebene Beziehung $f \neq B$ werden zum Herleiten von (1) benötigt, es genügt $h, f < a$ bzw. $f \neq C, D, I$. Man kann daher die Bedingung (d) so abschwächen, wie dies in der Lösung Teil d) angegeben wurde.
Der so ergänzten Tabelle ist unmittelbar zu entnehmen, dass (als letzte Möglichkeit)
(2) $f = M$ gelten muss, was wir durch ein „+" kennzeichnen. Außerdem ist zu erkennen, dass auch $k = E$ gelten muss. Dies ermöglicht nun verschiedene Lösungsvarianten.

	a	f	g	h	j	k
B	-	-	+ (5)	-	-	- (5)
C	-	-	-	+ (6)	-	- (6)
D	- (3)	-	- (3)	- (3)	+ (3)	- (3)
E	-	-	-	-	-	+ (7)
I	+ (4)	-	- (4)	- (4)	-	- (4)
M	- (2)	+ (2)	- (2)	- (2)	- (2)	- (2)

	a	f	g	h	j	k
B	-	-		-	-	
C	-	-			-	
D	-	-	-	+ (3)	-	
E	-	-		-	-	
I	+ (4)	-	-	-	-	-
M	-	+ (2)	-	-	-	-

In der oben stehenden linken Tabelle wird die in der angegebenen Lösung gewählte Variante festgehalten. Nachdem die restlichen Felder der letzten Zeile mit „-(2)" gefüllt wurden, bleibt in der 5. Spalte die Beziehung (3) j = D als letzte Möglichkeit, man trägt sie als „+(3)" ein, usw.
In der oben stehenden rechten Tabelle sind alle Folgerungen eingetragen, die man ziehen kann, ohne Bedingung (e) zu verwenden. Sie enthält 8 leere Felder, die sich nicht eindeutig füllen lassen.
Wählt man (5) g = B, so erhält man die in unserer Lösung angegebene Zuordnung.
Wählt man (5') g = E, dann kann man (6) h = C und (7') k = B ableiten und erhält die in der angegebenen Lösung im Teil b) angegebene 2. Zuordnung, welche die Bedingungen (a) bis (d) erfüllt.
Wählt man (5") g = C, dann erhält man einen *Widerspruch*, also *keine weitere Lösung*.
Dass die Hinzufügung von Bedingung (f) zu einem Widerspruch zu (7) k = E führt, ist leicht zu finden, wenn man auf einen solchen Widerspruch gefasst ist.
Würde man auf den *Existenznachweis* (die „Probe“) für die im *Einzigkeitsnachweis* hergeleitete „lösungsverdächtige“ Zuordnung verzichten, dann könnte es ohne weiteres vorkommen, dass man nicht merkt, dass eine (in der Herleitung nicht verwendete, relativ „versteckte“) Bedingung nicht erfüllt ist.
[Lies im Arbeitsmaterial auf S. 9 „Tabellen als Hilfsmittel beim Lösen von Zuordnungsaufgaben“ und auf S. 7 „Einige mathematische und logische Grundlagen“.]

Aufgabe 9)

Der Formulierung der Teilaufgaben a) und b) ist zu entnehmen, dass hier ein *Einzigkeitsnachweis* und ein *Existenznachweis* gefordert werden. Dies legt es nahe, diese beiden Teilaufgaben zusammenzufassen und die Bezeichnungen I. und II. zu verwenden.
Die Folgerungen aus den gegebenen Bedingungen lassen sich wie folgt in einer *Tabelle* festhalten. Dabei erkennt man, dass (c)(aus (a) und (b) folgt und daher eine „überflüssige“ Bedingung ist, von der man im Existenznachweis zeigen muss, dass sie den anderen Bedingungen nicht widerspricht.

Bed.	1. Dreiergruppe	2. Dreiergruppe	Bemerkungen
(a)	A	D, F	eindeutig
(b)	“ , B, E	C, “ , “	erfüllt (a)
(c)		C, “ , F	(a), (b) $\Rightarrow$ (c)
(d)	F	D	erfüllt (a) nicht
(e)	A, E	D	erfüllt (a), (b), (c)

Aufgabe 10)

Um die *Wahrheitswerte* der gegebenen 12 Aussagen zu ermitteln, liegt es nahe, zunächst nach *Widersprüchen* zwischen zwei Aussagen zu suchen.
(a_2) und (d_3) widersprechen einander, weil D nicht zu spät gekommen sein kann, wenn er das Spiel angestoßen hat.
Offensichtlich widersprechen auch (a_3) und (d_2) einander.
Hieraus und aus der Voraussetzung, dass jeder Junge nur einmal lügt, kann man folgern, dass (a_1), (d_1) und (b_1) wahr sind, woraus dann folgt, dass C der Täter war. Auch die Wahrheitswerte der restlichen Aussagen lassen sich leicht ermitteln.

Z a h l e n t h e o r i e

B e s t i m m u n g s a u f g a b e n

Aufgabe 1)

Bei einer derartigen Aufgabe ist eine *Tabelle* ein günstiges Hilfsmittel, mit deren Hilfe man die gegebenen Bedingungen übersichtlich festhalten kann.
Bedingung (a) legt es nahe, für die 3. Zahl die *Variable x* einzuführen, weil sich dann die 1. Zahl leicht durch x ausdrücken lässt. Dann kann man m. H. der Bedingung (c) die 4. Zahl ausdrücken und dann m. H. der Bedingung (b) die 2. Zahl. Die Bedingung (d) liefert dann die *Ansatzgleichung.*
Ungeschickter wäre es, die 1. Zahl mit x zu bezeichnen. Dann ließe sich zwar aus Bedingung (c) die 4. Zahl recht einfach durch $(2\cdot x + 25)$ ausdrücken, nicht so einfach wäre aber die Folgerung aus (a), dass die 3. Zahl durch $(x + 7):2$ dargestellt werden kann. Die Ansatzgleichung $6{,}5\cdot x + 53{,}5 = 151$ führt zu $x = 15$.

	Nebenrechnungen	Term	
1. Zahl		x	**15**
2. Zahl	x + (2·x + 25) =	3·x + 25	
3. Zahl	(x + 7):2 =	0,5·x + 3,5	
4. Zahl		2·x + 25	
Summe		6,5·x + 53,5	151

[Lies im MatKZM7 die Abschnitte 1.3. (Aussageformen und Mengen) und 1.5. (Das Lösen von Bestimmungsaufgaben).]

Aufgabe 2

Hier ist es günstig, die erste der gesuchten 12 Zahlen mit x zu bezeichnen, die gegebene Bedingung in Form einer *Gleichung* festzuhalten und diese Gleichung zu lösen.

Aufgabe 3)

Man untersucht zunächst, welche der gegebenen Bedingungen die *meisten Informationen* liefert, d.h. die Menge der *lösungsverdächtigen* Elemente am stärksten einschränkt. Dies ist in unserem Fall die Bedingung (b).
Da die Menge der so gewonnenen *lösungsverdächtigen* Elemente (die in unserem Fall Tripel sind) endlich ist, kann man nun aus dieser Menge alle diejenigen *Elemente aussondern*, welche die restlichen Bedingungen nicht erfüllen.
[Lies im MatKZM7 die Abschnitte 1.3. (Aussageformen und Mengen) und 1.5. (Das Lösen von Bestimmungsaufgaben).]

Aufgabe 4)

Bei dieser Aufgabe führt systematisches Probieren kaum ans Ziel. Das *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* ist wesentlich effektiver. Dabei ist es günstig, von der *„informativsten“* Bedingung (c) ausgehend zu folgern, dann Bedingung (b) zu berücksichtigen und schließlich die Bedingung (a) verwendend zu einer *Gleichung* mit zwei Variablen zu gelangen, deren Lösungen durch *systematisches Erfassen aller Möglichkeiten* ermittelt werden.

Aufgabe 5)
Ermittle zu den gegebenen Bedingungen die *Erfüllungsmengen* und bilde deren *Durchschnitt*:

Bedingungen	Erfüllungsmengen
(a) 8|x	M_1 = { 0 , 8 , <u>16</u> , 24 , ... , 96 , 104 , 112 , ... }
(b) QS(x) = 7	M_2 = { 7 , <u>16</u> , 25 , 34 , ... , 70 , 106 , 205 , ... }
(c) QP(x) = 6	M_3 = { 6 , <u>16</u> , 23 , 32 , 61 , 116 , 123 , ... }

$$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{16, ..., ?, ...\}$$

Diese Durchschnittsbildung führt wegen der Unendlichkeit der Durchschnittsmengen nicht unmittelbar zum Ziel.
Wende folgende Regel an: *Was lässt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar folgern?*
[Lies dazu im MatKZM7 den Abschnitt 1.3. (Aussageformen und Mengen) und den Abschnitt 1.5. (Das Lösen von Bestimmungsaufgaben; Einzigkeits- und Existenznachweis).]

Aufgabe 6)

Man beginnt stets mit Folgerungen aus derjenigen *Bedingung,* welche die *meiste Information* enthält, d.h. welche die *"kleinste" Erfüllungsmenge* hat.
Man beachte, dass in der Lösung (keine *Prim*faktorzerlegungen sondern) nur Faktorzerlegungen vorkommen, da 1 nach Definition keine Primzahl ist.
Die Bedingungen (a) und (b) werden jeweils von unendlich vielen Tripeln erfüllt, wogegen die Erfüllungsmenge von (c) endlich ist. Daher ermittelt man (hier durch *systematisches Erfassen aller möglichen Fälle)* zunächst die Erfüllungsmenge von (c) und prüft dann nach, welche ihrer Elemente auch die restlichen Bedingungen erfüllen.
[Lies im MatKZM7 den Abschnitt 1.3. (Aussageformen und Mengen) sowie den Abschnitt 1.5. (Das Lösen von Bestimmungsaufgaben).]

Aufgabe 7)

Beim *Analysieren der gegebenen Bedingungen* kann auffallen, dass im *Spezialfall* $y = 1$ die Bedingung (d) für alle x gilt; wegen (c) gilt dann $x = 13$; wegen $13 + 4\cdot 1 = 17$ ist (b) eine wahre Aussage und da $(13 + 1 =)$ 14 kein Vielfaches von 3 ist, ist (a) die gesuchte falsche Aussage.
Ferner kann man erkennen, dass wegen (c) $x = 8y + 5$ sich die anderen Aussagen durch Einsetzen von x *vereinfachen* lassen:
(a*) $(8y + 5) + y = 9y + 5 = 3k$; (dies ist für alle y eine falsche Aussage);
(b*) $[p = (8y + 6) + 4y =]$; $(12y + 5)$ ist eine Primzahl;
(d*) $y|(8y + 6)$.
Aus (b*) und (d*) kann man dann durch *systematisches Erfassen aller möglichen Fälle* die gesuchte Lösungsmenge L = {(13; 1), (21; 2), 29; 3)} erhalten (siehe Tabelle in der Lösung).

B e w e i s a u f g a b e n

Aufgabe 8)

Bezeichnungen V_1, V_2; ... für die Voraussetzungen einführen!
Auch bei einem *Beweis* ist es meist nützlich, den Aufgabentext aus der „*Wortsprache*“ in eine günstig gewählte *„Zeichensprache“* zu übersetzen.
In der Regel bedeutet dies, zunächst *Variable* oder andere abkürzende Bezeichnungen zu verwenden und anschließend die Symbolik der verwendeten mathematischen Disziplin (in unserem Fall der Teilbarkeitslehre) einzusetzen.
Beachte, dass nach dem Verfahren des Erstklässlers Gauß $(1+2+3+...+8+9) = 9\cdot 10:2$ gilt.

Zusatzaufgabe: Entscheide, ob der von uns bewiesene Satz auch dann gilt, wenn die Summe (nicht 10 sondern) 2007, 2008 oder 2009 Summanden hat.

Aufgabe 9)

Bezeichnungen V_1, V_2; ... für die Voraussetzungen einführen!
Führe *Variable* ein und übersetze in die *Sprache der Gleichungen*.
Was lässt sich aus der Voraussetzung *unmittelbar folgern*?
Der Beweis von Teil a) wird einfacher, wenn man die Voraussetzung wie folgt formuliert:
V_1: $s = (2\cdot n - 3) + (2\cdot n - 1) + (2\cdot n + 1) + (2\cdot n + 3)$, $n \in \{2, 3, 4, ... \}$.
Hieraus folgt unmittelbar $s = 8\cdot n$ und hieraus $8|s$.

Aufgabe 10)

Bezeichnungen V_1, V_2; ... für die Voraussetzungen einführen!
Günstige Bezeichnungen (*Variable*) einführen; Voraussetzungen und Behauptung *günstig festhalten*.
Rückwärtsarbeiten: Wenn man zeigen könnte, dass s ein Vielfaches von 21 ist, dann käme man durch Anwendung der Definition von a|b sofort ans Ziel.
Vorwärtsarbeiten: Da der kleinste Summand n laut Voraussetzung durch 3 teilbar ist, muss er, nach Definition von a|b die Gestalt $n = 3x$ mit $x \in N$ haben.
Der zweite Summand muss dann die Form $n + 1 = 3x + 1$ haben, usw.
Nun versucht man von diesen Feststellungen ausgehend durch Umformen zu dem oben gefundenen hinreichenden „$s = 21\ m$ mit $m \in N$" zu gelangen.
[Lies im MatKZM7 den Abschnitt 3.2. (Teilbarkeitslehre).]

Aufgabe 11)

Bezeichnungen V_1, V_2; ... für die Voraussetzungen einführen!
Führe *Variable* ein und übersetze in die *Sprache der Gleichungen*.
Was lässt sich aus den Voraussetzungen *unmittelbar folgern*? *Mit welcher Voraussetzung* sollte man *beginnen*?

Aufgabe 12)

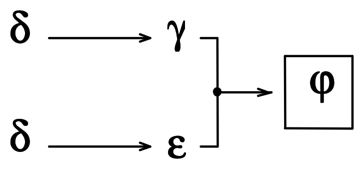
Zunächst werden Voraussetzung und Behauptung mit Hilfe von *Variablen* festgehalten.
Rückwärtsarbeiten:
24|z würde aus 3|z und 8|z folgen (weil 3 und 8 teilerfremd sind).
3|z würde aus der Feststellung folgen, dass ein Faktor von z durch 3 teilbar ist.
8|z würde aus $z = 8m$ mit $m \in N$ folgen.
Diese hinreichenden Feststellungen lassen sich durch *Vorwärtsarbeiten* erreichen.

G e o m e t r i e

Aufgabe 1)

Von $\sphericalangle$ FDB = δ ausgehend gelangt man durch *Vorwärtsarbeiten* zunächst zu δ_1, von hier aus über α und β zu γ, woraus sich dann die gesuchten Winkel γ und ε berechnen lassen).
[Lies dazu in „Sätze" den Abschnitt IVb (Winkel und Seiten im Dreieck).]

Aufgabe 2)



Vorwärtsarbeiten! Welche Größe lässt sich aus der gegebenen Größe unmittelbar berechnen? [γ] .
Begründung! [$2\gamma + \delta = 180°$]
Was lässt sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar ableiten? [Aus (a) und (b) folgt $\varepsilon = \delta$.]
Rückwärtsarbeiten! Aus welchen Größen ließe sich die gesuchte Größe unmittelbar berechnen? [Aus ε und γ.]
Begründung! [Nach dem Außenwinkelsatz gilt $\varepsilon = \varphi + \gamma$.]
Im nebenstehenden *Lösungsgraphen* sind die Knoten mit Größen (gegebenen, gesuchten und Hilfsgrößen) belegt.
Hier ist es rationell, die Rechnung nicht erst mit den konkreten Daten, sondern gleich mit den Parametern durchzuführen. Der "allgemeinen Lösung" (8) kann man leicht durch Einsetzen der konkreten Daten die spezielle Lösung entnehmen.
[Lies dazu in "Sätze" die Abschnitte IVa und IVb.]

Aufgabe 3)

Rückwärtsarbeiten:
δ könnte man (mit Hilfe des Außenwinkelsatzes) berechnen, wenn ε und β' bekannt wären.

Vorwärtsarbeiten:
β' erhält man sofort aus β (mit Hilfe des Nebenwinkelsatzes), desgleichen α' und γ' aus α und γ.
Aus α' und γ' lässt sich (mit Hilfe des Innenwinkelsatzes) ε' berechnen, und hieraus erhält man dann das benötigte ε.
[Lies dazu in "Sätze" den Abschnitt IVb. (Winkel und Seiten im Dreieck).]

Aufgabe 4)

Planfigur anfertigen! *Bezeichnungen* (a), (b), ... für die gegebenen Bedingungen einführen!
Vorwärtsarbeiten: Was lässt sich aus φ unmittelbar berechnen? Der Winkel γ (Ergänzung zu einem gestreckten Winkel).
Was lässt sich aus γ berechnen? Da γ ein Außenwinkel ist, gilt $\gamma = \alpha + \beta$ und wegen $\alpha = \beta$ lässt sich α berechnen; usw.
Man kann auch *Rückwärtsarbeiten:* Woraus ließe sich ε berechnen? Da ε Innenwinkel im gleichschenkligen Dreieck DEA ist, wäre α eine hinreichende Hilfsgröße.
Woraus ließe sich α berechnen? ..... usw.
Hier ist es zweckmäßig, die Rechnungen nicht mit den konkreten Daten sondern mit *Parametern* durchzuführen. Der „allgemeinen Lösung" (9) kann man leicht die Lösung für jedes konkret vorgegebene φ entnehmen. Darüber hinaus erkennt man, dass wegen
$0° < \varphi < 180°$ stets $67{,}5° < \varepsilon < 90°$ gelten muss, dass für wachsendes φ auch ε größer wird und dass es genau einen Wert gibt, für den $\varepsilon = \varphi$ gilt.

Aufgabe 5)

Planfigur zeichnen!
Rückwärtsarbeiten: Woraus würde folgen, dass $\overline{BC} = \overline{BD}$ gilt? [Nach Umkehrung des Basiswinkelsatzes für Dreieck CDB aus der *hinreichenden* Feststellung (5), dass $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ gilt.]
Vorwärtsarbeiten: Die Parallelität von w und CD deutet auf Sätze über Winkel an geschnittenen Geraden als Hilfsmittel hin. Dies kann zu den *ableitbaren* Feststellungen $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$ und $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$ führen. Da nach Voraussetzung V_1 $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ gilt, hat man einen Weg zum Ziel gefunden.

[Lies dazu im MatKZM7 den Abschnitt 1.4. (Das Beweisen von Sätzen) sowie in "Sätze" die Abschnitte II (Winkel) und IVa (Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke).]

Aufgabe 6)

Planfigur zeichnen!
Vorwärtsarbeiten! Was lässt sich aus den Voraussetzungen unmittelbar folgern?
Wegen V_1 liegt die Verwendung eines Satzes über Winkel an geschnittenen Geraden nahe, was zur abgeleiteten Feststellung (1) führt.
V_2 weist auf den Basiswinkelsatz als *günstiges Hilfsmittel* hin, was zur *abgeleiteten* Feststellung (2) führt.
Von (1) und (2) gelangt man dann sofort zur Behauptung.
Man kann diesen Lösungsplan auch in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \rightarrow \sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA \\ \\ V_2 \rightarrow \sphericalangle DCA = \sphericalangle CAD \end{array}\right] \rightarrow \boxed{\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD}$$

Vergleiche diesen Lösungsgraphen mit dem Lösungsgraphen in Aufgabe G7).
Achte auf Gemeinsamkeiten! Hier sind die Knoten des Graphen mit den Voraussetzungen, den abgeleiteten Feststellungen und der Behauptung (d.h. mit Aussagen bzw. Aussageformen) belegt.

[Lies dazu im MatKZM7 den Abschnitt 1.4. (Das Beweisen von Sätzen) und in „Sätze" den Abschnitt V (Vierecke).]