Hinweise zur Lösungsfindung und zur didaktischen Aufbereitung
Teil 2

Z a h l e n t h e o r i e

10) Um den Rechenaufwand zu minimieren, sollte man beim *Euklidischen Algorithmus* stets die absolut kleinsten Reste verwenden.
Beim Durcharbeiten des Arbeitsmaterials soll der Schüler sich die *Grundgleichung der Zahlentheorie* aneignen und deren Rolle für das Herleiten des Algorithmus erkennen.
Wiederholen der *Primfaktorzerlegung.*

11) Definition „*Kongruenz*“; Anwenden der *Grundgleichung der Zahlentheorie.*
Beim Durcharbeiten des Arbeitsmaterials soll sich der Schüler folgende Zusammenhänge zwischen den „Sprachen“ der Kongruenzen, der Teilbarkeit und der Gleichungen einprägen:

Kongruenzen	Teilbarkeit	Gleichungen
$a \equiv b \ (m)$	$m\|(a - b)$	$a - b = q\cdot m$
$a \equiv 0 \ (m)$	$m\|a$	$a = q\cdot m$

Dabei sind a, b und q ganze Zahlen und m eine natürliche Zahl größer als 1.

12) Aneignen der Regel zur *Vereinfachung von Kongruenzen* durch *Division* auf beiden Seiten.
Der Schüler soll daran gewöhnt werden, sich nicht nur bei der umgeformten sondern auch bei der gegebenen Kongruenzaussage zu überzeugen, dass die Aussage wahr ist (siehe Aufgabe 11)).

13) Übersetzen in die *Sprache der Kongruenzen*; Anwenden von Rechenregeln; Rückübersetzung. Wiederholen von *„Lösungsschema“* und *„Lösungsgraph“.*

14) Wiederholung *„Beweisschema“.*
Übersetze die Voraussetzungen und die Behauptung *in die Sprache der Gleichungen*.
RA: Aus welcher Gleichung würde die Behauptung folgen?

15) Bei dieser Aufgabe wird vom Schüler *Kreativität* verlangt. Wenn er nicht selbständig ans Ziel gelangt, können folgende Impulse hilfreich sein:
- Löse zunächst *einfachere Aufgaben*, um zu *Vermutungen* zu gelangen.
- Verwende *Tabellen*, um die Ergebnisse übersichtlich festzuhalten.

Wenn man die Tabellen zu den Aufgaben 3^n mod 5, 4^n mod 5, 8^n mod 5 und 13^n mod 5 aufstellt, besteht nicht nur die Chance, das in Teil a) geforderte Verfahren zu entdecken, sondern man hat auch wichtige Erkenntnisse für das Lösen von Teil b) gewonnen. Die Aufgabenfolge 3^n mod 4, 3^n mod 6 und 3^n mod 7 liefert weitere Erkenntnisse.

16) Übersetzen in die *Sprache der Kongruenzen.*
Im Teil b) führt die *Hilfsmittelfrage beim RA* zu dem Satz „Wenn $a|c$ und $b|c$ und a, b teilerfremd, dann $ab|c$“.
Im Teil a) erlauben die speziell gewählten Zahlen für a und b einen kürzeren Lösungsweg.

17) Die Teile a) und b) sind keine problemhaften Aufgaben.
Bei Teil c) muss man erkennen, dass die Aussagen $7|1001$ (und daher auch $7|1001q$) günstige *Hilfsmittel* sind. Sonst hat man keine Chance, die trickreiche Umformung zu finden.
Die *Lösungsvariante* zeigt, dass auch hier das *Rechnen mit Kongruenzen* hilfreich sein kann.

18) Die Formulierung „Untersuche, ob es ... gibt" erfordert einen *Einzigkeitsnachweis I.* und einen *Existenznachweis II.*

K o m b i n a t o r i k

9) Hier führt *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* zum Ziel, wobei als *Hilfsmittel* Formeln aus der Kombinatorik benötigt werden.

10) Wieder führt *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* zum Ziel.
Nach dem Einführen von *Variablen* gelingt es mit dem *Hilfsmittel* „Multiplikationsregel" aus der Kombinatorik, die Anzahl der fünfbuchstabigen Wörter durch k und v auszudrücken, was zur *Gleichung* (1) führt.
Durch eine *Fallunterscheidung* gelingt es, die Lösungen dieser Gleichung zu ermitteln.

11) Auch bei dieser Aufgabe führt *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* zum Ziel und ist die Multiplikationsregel ein wichtiges *Hilfsmittel*.
Diese relativ schwierige Aufgabe wird noch anspruchsvoller, wenn man die Teilaufgaben a) und b) streichen würde, die helfen, den Teil c) zu lösen. Darüber hinaus ist es wichtig, zu erkennen, welches *Teilziel* zuerst erreicht werden muss (Ermitteln der Anzahl 900).
Beim sehr anspruchsvollen Teil c) wird man durch das Untersuchen von *Spezialfällen* versuchen, zunächst zu einer *Vermutung* zu gelangen, welche der beiden Arten von Palindromzahlen häufiger vorkommen. Auf diese Weise steigen auch die Chancen, zu erkennen, dass eine *Fallunterscheidung* erforderlich ist und welche Schlussfolgerungen nützlich sein können.
Beim Ermitteln der Anzahl 450 der Palindromzahlen $\overline{abccba}$ mit $b < a$ im Teil c) der Aufgabe ist folgende *Tabelle* nützlich:

a nimmt die Ziffer ... an	1	2	...	8	9
Anzahl Ziffern für b Anzahl Ziffern für c	1 10	2 10	... ...	8 10	9 10
Wert für b·c	1·10	2·10	...	8·10	9·10

G e o m e t r i e

9) Einer genau gezeichneten *Figur* kann man die *Vermutung* |BC| = |CE| entnehmen.
Die *Hilfsmittelfrage beim RA* führt dann zur *Kongruenz von Dreiecken*.
Das Einführen von *günstigen Bezeichnungen* für Winkelgrößen erleichtert die Lösungsfindung und die Lesbarkeit der Lösung.
Die Bedingungen (a) bis (e) führen bei der *Hilfsmittelfrage beim VA* zu den Sätzen über Winkel in Dreiecken. Bedingung (e) führt zum Basiswinkelsatz und Sätzen über Winkel am Kreis als Hilfsmittel.

10) Recht naheliegend ist das Einführen der *Hilfslinie* $\overline{AE}$, was zur *Vermutung f*ührt, dass M auf $\overline{AE}$ liegt und was die Betrachtung des rechtwinkligen *Hilfsdreiecks* ADM nahelegt.
Rückwärtsarbeiten: Könnte man die *Hilfsgröße* $\overline{AM} = x$ berechnen (d.h. durch a ausdrücken), dann käme man mit dem *Satz des Pythagoras als Hilfsmittel* zum Ziel. Dieser Satz liefert eine Gleichung zwischen der gegebenen, der gesuchten und der Hilfsgröße.
Vorwärtsarbeiten: Die bislang noch nicht verwendete Voraussetzung |AB| = |AE| = a liefert eine zweite *Gleichung* zwischen a, r und x.
Nun braucht man nur noch x zu eliminieren, um ans Ziel zu gelangen.

11) Dies ist die erste geometrische Aufgabe, bei der der Schüler untersuchen soll, ob der bewiesene Satz *verallgemeinert* werden kann. Der Schüler soll sich angewöhnen, nach jedem gefundenen Beweis zu untersuchen, ob tatsächlich alle angegebenen Voraussetzungen benötigt werden. Ist dies nicht der Fall, dann soll er sich überzeugen, dass diese Voraussetzung keiner anderen Voraussetzung widerspricht. Weiterhin soll er nach einer möglichen Verallgemeinerung suchen und überprüfen, ob der Beweis auch für die Verallgemeinerung ausreicht.
Es wird Schüler geben, die erst beim Durcharbeiten der Lösung einsehen, dass die durchgeführte *Fallunterscheidung* (Lage des rechten bzw. stumpfen Winkels) notwendig ist. Man sollte ausdrücklich darauf hinweisen, dass das Betrachten der Figuren nur zu *Vermutungen* führt, die noch bewiesen werden müssen.
Die *Teilzielfrage beim RA* kann zur *hinreichenden Feststellung* führen, dass die Summe der Größen zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° betragen muss.
Beim anschließenden VA ist es günstig, Bezeichnungen für Hilfswinkel einzuführen und Gleichungen zu verwenden.

12) Die Voraussetzung $|\sphericalangle MPA| = |\sphericalangle AQM| = 90°$ weist beim *VA* auf die Umkehrung des Satzes des Thales (oder des Sehnenvierecksatzes) als *Hilfsmittel* hin, was zum Umkreis von APMQ als günstige *Hilfslinie* führt.
Durch *RA* kann man auf die *Hilfsmittel* "Drittengleichheit", "Winkel mit paarweise orthogonalen Schenkeln" oder "Winkel in zwei Dreiecken, die in den anderen beiden Winkeln übereinstimmen" stoßen.

13) Nach dem Einzeichnen der acht Radien $\overline{M_1A}$ bis $\overline{M_3D}$ sowie der Radien $\overline{SA}$, $\overline{SB}$ und $\overline{SC}$ als *Hilfslinien* kann man durch VA relativ einfach die Vermutung, dass die beiden Radien gleich sind, aus den Voraussetzungen ableiten.
Da keinesfalls offensichtlich ist, dass der als vierter Punkt eines Rhombus konstruierte Punkt mit dem Umkreismittelpunkt S zusammenfällt, ist es günstig, diesen Punkt zunächst S‘ zu nennen und dann zu beweisen, dass S = S‘ gilt.

14) Hier wird das in der Aufgabe 11) eingeführte *Verallgemeinern* eines Satzes fortgeführt, indem durch die Aufgabenstellung ein *Beweis der Vermutungen* verlangt wird. Man lasse die beiden Lösungen auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede vergleichen.
Der Auftrag, die Behauptung (B_1) abzuleiten, soll die Lösungsfindung erleichtern. Bei der Frage nach einer möglichen Verallgemeinerung ist allein die Behauptung (B_2) von Bedeutung.
Es ist hilfreich, wenn man bereits beim Zeichnen einer genauen *Figur* entdeckt, dass der Winkel CBP ein rechter Winkel ist und wenn man dabei auf den Satz des Thales als *Hilfsmittel* stößt.
Die *Hilfsmittelfrage beim RA* kann beim Ableiten von (B_1) zu den Sätzen über Winkel an geschnittenen Geraden führen.
Beim VA stößt man wegen V_5 auf die *Hilfspunkte* H_a, H_b und H_c sowie auf die Höhen als *Hilfslinien*.
Beim Ableiten von (B_2) kommt es darauf an, zu erkennen, dass der Satz über die Diagonalen im Parallelogramm ein günstiges *Hilfsmittel* ist.

15) Die *Hilfsmittelfrage beim RA* kann zum *Hilfsmittel „Kongruenz von Dreiecken“* führen. Wenn man erkannt hat, welche Dreiecke kongruent sind, ist der Nachweis der Kongruenz recht einfach.
Man kann sich davon überzeugen, dass die Feststellung, dass die drei Geraden einander in einem Punkt - dem Fermat-Punkt - schneiden, wahr ist. Dieser Sachverhalt wird bei diesem Beweis jedoch nicht benötigt.

16) Bei dieser Aufgabe spielt das Problem der *Verallgemeinerung* eines Satzes und der diesbezügliche Vergleich mit den Aufgaben 11) und 14) eine wichtige Rolle. Der Schüler sollte sich angewöhnen, dieses Problem stets zu beachten und nachzuprüfen, ob eine der gegebenen Voraussetzungen für den gefundenen Beweis nicht benötigt wird.
Die Ableitung der Behauptung (B_1) aus V_2 ist durch *VA* leicht möglich und gilt offensichtlich für beliebige Dreiecke.
Bei der Ableitung von (B_2) kann die *Teilzielfrage beim RA* zur Kongruenz der angegebenen Dreiecke führen. Hier spielt das Verwenden von *Hilfslinien* und das Einführen von Bezeichnungen für verwendete *Hilfswinkel* eine wichtige Rolle.

17) Dies ist die vierte (und letzte) Aufgabe zur Problematik *„Verallgemeinerung“*. Daher sollte man mit dem Schüler die Aufgaben/Lösungen der Aufgaben 11), 14), 16) und 17) vergleichen und die gewonnenen *Erkenntnisse zusammenfassen*.
Hier wird nur das Verallgemeinern eines Satzes durch *Abschwächen der Voraussetzung* betrachtet. In den Aufgaben 11), 14) und 16) wird zunächst nur ein Beweis eines Satzes für spitzwinklige Dreiecke verlangt. Bei der Aufgabe 11) soll der Schüler durch das Zeichnen genauer Figuren zu einer *Vermutung* gelangen, ob der Satz auch für rechtwinklige oder stumpfwinklige Dreiecke gilt. Hierzu ist eine *vollständige Fallunterscheidung* erforderlich. Es liegt nahe, zunächst den Fall zu untersuchen, ob der Winkel mit dem Scheitelpunkt C ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel ist. Man darf aber nicht den Fall vergessen, dass der Scheitel des rechten oder stumpfen Winkels in A (oder B) liegt.
In den Aufgaben G14) und G16) wird der Schüler aufgefordert, zu *untersuchen*, ob eine *Verallgemeinerung* möglich ist. Dies erfordert stets einen *Beweis* der gefundenen Vermutungen sowie die Untersuchung, ob der für spitzwinklige Dreiecke angegebene Beweis auch alle anderen betrachteten Fälle erfasst.
Der in der Aufgabe11) bewiesene Satz gilt zusätzlich nur in dem Fall, dass der rechte oder stumpfe Winkel den Scheitel in C hat. Der angegebene Beweis gilt auch für stumpfe Winkel. Für den Fall $|\sphericalangle BAC] = 90°$ muss ein neuer Beweis gefunden werden.
Die in den Aufgaben 14) und 16) bewiesenen Sätze gelten für beliebige Dreiecke. In der Aufgabe 14) muss ebenfalls für den Fall $|\sphericalangle BAC] = 90°$ ein neuer Beweis gefunden werden.
In der Aufgabe 16) müssen 4 Fälle unterschieden werden und der Fall $\alpha = 135°$ muss gesondert bewiesen werden.

Bei dieser Aufgabe kann die *Hilfsmittelfrage beim RA* hilfreich sein. Hier gilt es, aus den vielen Möglichkeiten, die Behauptung „PQRS ist ein Quadrat“ abzuleiten, eine günstige auszuwählen.
Beim 1. Lösungsweg sind dies die Feststellungen $|\sphericalangle QPS| = 90°$ und $|PQ| = |PS|$. Die erste Feststellung lässt sich mit dem *Hilfsmittel* „Drehung“ herleiten, die zweite über die Kongruenz zweier Dreiecke.
Beim 2. Lösungsweg hilft folgender Satz: Ein Viereck, dessen Diagonalen einander halbieren und aufeinander senkrecht stehen, ist ein Quadrat.

18) Das Streichen von Teil a) *verschärft* die Aufgabe. Die *zugehörige Bestimmungsaufgabe* lautet: Ermittle die Größe des Winkels DMA in Abhängigkeit von ε. Hier tritt der seltene Fall auf, dass diese Bestimmungsaufgabe leichter ist als die Beweisaufgabe. Sie legt es nämlich nahe, möglichst viele Winkel durch ε auszudrücken, was schließlich zu dem angegebenen Lösungsweg führt. Die Beweisaufgabe legt es dagegen nahe, günstige *Hilfswinkel* einzuführen, nach *Gleichungen* zu suchen und schließlich ein Gleichungssystem zu lösen. Dies ist hier jedoch nicht die optimale Lösungsstrategie.

19) Bei dieser Aufgabe kann man erkennen, wie weit der Schüler bereits in der Lage ist, sich *selbständig ein Stoffgebiet anzueignen*, das er im Unterricht noch nicht kennen gelernt hat. Leistungsstarke Schüler sollten ermuntert werden, anknüpfend an den „Hinweis“ in der Lösung nach einfacheren Lösungswegen zu suchen.

20) Man wendet die Methode der geometrischen Örter an:

- Mit welchem Bestimmungsstück werde ich günstig beginnen? [Mit $\overline{AC}$ = b].
- Welche Punkte sind dann gegeben? [A und C; sie werden „grün“ eingetragen].
- Welcher Punkt ist dann gesucht? [Punkt B; er wird „rot“ eingetragen].
- Kenne ich 2 geometrische Örter für den gesuchten Punkt?
  - ° Kenne ich 2 Bedingungen für den gesuchten Punk t (die mir die gesuchten geometrischen Örter liefern)? [B liegt wegen Bedingung (b) auf k(A; c); B liegt wegen (c) und (d) auf einer der beiden Parallelen g, g_1 zu AB im Abstand h_b].

21) Hier liegt es nahe, von der Bedingung (a) auszugehen und als *gegebene Punkte* B und C zu wählen.
Für den *gesuchten Punkt* A ist wegen Bedingung (c) als *erster geometrischer Ort* (GO) der Strahl $\overrightarrow{BA}$ als freier Schenkel des gegebenen Winkels bekannt. Da ein zweiter GO nicht sofort gefunden werden kann, wendet man die *Methode der Hilfselemente* an.
Da in Bedingung (b) eine Streckensumme gegeben ist, führt man den *(naheliegenden) Hilfspunkt* D so ein, dass eine Strecke der gegebenen Länge s entsteht. Das führt zu dem *Hilfsdreieck* DBC, das nach dem Kongruenzsatz sws stets eindeutig konstruierbar ist.
Wegen s = c + b erhält man D durch eine Streckenabtragung von $\overline{AC}$ auf dem Strahl $\overrightarrow{BA}$ über A hinaus, woraus |AD| = |AC| folgt.
Da im gleichschenkligen Dreieck CDA der Punkt A auf der Mittelsenkrechten von $\overline{CD}$ liegt, ist m_{DC} ein 2. GO für den gesuchten Punkt A.
Damit ist ein Lösungsplan gefunden.

22) Wegen Bedingung (c) liegt es nahe, C und H als *gegebene Punkte* zu wählen. Dann ist die Senkrechte auf $\overline{CH}$ durch H ein 1. GO für die *gesuchten Punkte* A und B. Durch Streckenabtragung kann man zu den *Hilfspunkten* D und E gelangen.
Für die Darstellung der Lösung erweist es sich jedoch als günstiger, mit der Konstruktion des *Hilfsdreiecks* EDC zu beginnen. Dabei werden die Hilfspunkte D und E als gegebene Punkte gewählt, für die |DE| = s gilt.
Aus den Bedingungen (c) und (d) folgt, dass eine Parallelele g zur Geraden DE im Abstand h ein 1. GO für den gesuchten Punkt C ist.
Rückwärtsarbeiten: Wenn man die Größe des Winkels EDX durch α ausdrücken könnte, dann hätte man mit dem Strahl $\overrightarrow{DX}$ einen 2. GO für C gefunden. Da CDA ein gleichschenkliges Dreieck ist, gelingt dies mit Hilfe des Basiswinkelsatzes und des Außenwinkelsatzes.
Die Stecke $\overline{DE}$ ist ein 1. GO für die gesuchten Punkte A und B. Als 2. GO bieten sich die Mittelsenkrechten von $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ an.

23) Die Bedingung (b) legt es nahe, A und B als *gegebene Punkte* zu wählen.
Wegen (c) und (d) ist für die *gesuchten Punkte* C und D jeweils der freie Schenkel der gegebenen Winkel ein 1. GO.
Die Bedingung (e) legt eine *Streckenabtragung* von $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ nahe. Von den vier Möglichkeiten ist das Antragen von $\overline{CD}$ auf dem Strahl $\overline{BC}$ die günstigste, weil dadurch das gleichschenklige Dreieck EDC und eine Strecke mit der Länge |BE| = s entsteht.
Zunächst ist der *Hilfspunkt E* konstruierbar, weil E auf dem Strahl $\overrightarrow{BX}$ und auf dem Kreis k(B; s) liegt.

24) Bei dieser Aufgabe ist leicht zu erkennen, dass man ohne einen Hilfspunkt nicht ans Ziel kommt und dass es auch keinen durch Streckenabtragung zu erzeugenden „naheliegenden“ *Hilfspunkt* gibt.
Von Bedingung (c) ausgehend kann man auf die Idee kommen, den Winkel ACB in drei gleich große Teile zu zerlegen und dann den Schnittpunkt D des freien Schenkels eines der

Teilwinkel mit der Stecke $\overline{AB}$ als *Hilfspunkt* zu wählen, so dass das gleichschenklige Dreieck BCD entsteht, über das „viel bekannt“ ist.
Auf diese Weise kann man auf den Basiswinkelsatz und den Außenwinkelsatz als nützliche *Hilfsmittel* stoßen. So kann man zu den *Bedingungen* $|AD| = b$ und $|DB| = c - b$ und damit zu dem verwendeten *Lösungsplan* gelangen.
Hier lernt der Schüler zum ersten Mal eine *parameterhaltige Konstruktionsaufgabe* kennen. Bei Konstruktionsaufgaben mit konkret gegebenen Größen kann er für jeden Konstruktionsschritt entscheiden, ob er eindeutig durchführbar ist oder nicht. Bei dieser Aufgabe muss er eine (mit Hilfe der Parameter formulierbare) Bedingung angeben, unter der es (mindestens) eine Lösung geben kann. Bei dieser Aufgabe liefern die Dreiecksungleichungen diese Bedingung.