Hinweise zur Lösungsfindung und zur didaktischen Aufbereitung
Teil 2

Z a h l e n t h e o r i e

Aufgabe 13)

Die Formulierung „ *Ermittle alle* ...“ weist darauf hin, dass außer einem *Einzigkeitsnachweis* (der begründeten Herleitung) auch ein *Existenznachweis* (eine Probe) erforderlich ist. Es ist üblich, diese beiden Nachweise mit I. und II. zu bezeichnen.

Teil b): Bezeichnet man die gesuchten Zahlen mit z = $\overline{abc}$, wobei a, b, c$\neq$0 gilt und a, b, c paarweise verschiedene Ziffern bezeichnen, dann *folgt* aus (a) $\overline{abc} = \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{cb}$ (beachte das *lexikografische Ordnungsprinzip*).
Es liegt nahe, diese Bedingung in die *Sprache der Gleichungen* zu übersetzen und die erhaltene *Gleichung* durch Umformung zu *vereinfachen*.
Dies führt zur Gleichung 26a = 4b + 7c.
Was *folgt* aus dieser Gleichung?
Welche *Hilfsmittel* kann man einsetzen? [Eigenschaften natürlicher Zahlen]
Beachte, dass auf der linken Seite eine gerade Zahl steht! Was *folgt* hieraus? [c muss eine gerade Ziffer sein]
Untersuche systematisch alle möglichen Fälle! Dies führt für c = 2, 4, 6 zu den *„lösungsverdächtigen“* Zahlen $z \in \{132; 264, 396\}$, der *Einzigkeitsnachweis I.* ist damit erbracht.
Der *Existenznachweis II.* darf nicht vergessen werden!
Teil c) Wenn man eine gegebene Bedingung weglässt, dann kann sich die Lösungsmenge vergrößern. Bleibt dabei die Lösungsmenge gleich, dann ist diese Bedingung *„überflüssig“.*
Welche Fälle können noch *auftreten*, wenn die Ziffern a, b, c nicht paarweise verschieden sein müssen? [Fall1: Genau zwei Ziffern sind gleich. Fall 2: Alle drei Ziffern sind gleich.]
Ermittle für beide Fälle *systematisch alle Möglichkeiten!*
[Fall 1.1: z = $\overline{aab}$; Fall 1.2: z = $\overline{aba}$; Fall 1.3: z = $\overline{baa}$; Fall 2: z = $\overline{aaa}$]

Aufgabe 14)

Hier liegt es nahe, die Nenner der Größe nach zu ordnen und herauszufinden, welche Werte der kleinste Nenner x annehmen kann.
Offensichtlich muss x > 1 gelten. Für x = y = z = 4 würde $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$< 1 gelten, was der gegebenen Bedingung widerspricht. Folglich kann nur x = 2 oder x = 3 gelten. Dies erfordert eine *vollständige Fallunterscheidung*.

Aufgabe 15)

Da die Erfüllungsmenge von (a) endlich ist, könnte man prinzipiell aus dieser Menge alle diejenigen Elemente ausschließen, die (b) oder (c) oder (d) nicht erfüllen, was jedoch zu einem enormen Rechenaufwand führen würde. Das *"Folgern aus den gegebenen Bedingungen"* ist wesentlich effektiver.
[Lies im "Arbeitsmaterial" die Abschnitte 1.3. (Aussageformen und Mengen) und 1.5. (Das Lösen von Bestimmungsaufgaben).]

Aufgabe 16)

[Lies im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 3.3. (Das Rechnen mit Kongruenzen).]

Aufgabe 17)

Probiere zunächst mit Zahlenbeispielen. Ein Gegenbeispiel widerlegt die Aussage sofort. [Teil a) und Teil c)]. Mit Hilfe der Definition von a|b kann man Voraussetzung und Behauptung eines Satzes aus der Teilbarkeitslehre *in die "Sprache der Gleichungen" übersetzen* und dann durch Umformen dieser Gleichungen ans Ziel gelangen.

Aufgabe 18)

Um zu der *Vermutung* zu gelangen, betrachtet man einige *konkrete Beispiele*, die die Voraussetzungen erfüllen. Man geht von einer ungeraden Zahl aus, zerlegt sie in eine Summe aus vier Summanden (was auf verschiedene Weisen möglich ist) und bildet dann das Produkt dieser Summanden. Auf diese Weise kann man auch die Beweisidee entdecken.

Wie man leicht sieht, lässt sich unser Satz noch weiter *verallgemeinern*, indem man in der Voraussetzung "natürliche Zahlen" durch "ganze Zahlen" ersetzt.
[Lies im "Arbeitsmaterial" den Abschnitt 1.2.3. (Verallgemeinern und Spezialisieren von Sätzen).]

Aufgabe 19)

Es liegt recht nahe, bei dieser Aufgabe das *Rechnen mit Kongruenzen* als *Hilfsmittel* einzusetzen.
Durch *Betrachten einiger konkreter Fälle* (vgl. Tabelle) kann man zu der *Vermutung* gelangen, dass unter den genannten Voraussetzungen stets 3|(4p+1) d.h. $4p + 1 \equiv 0 \ (3)$ gilt und aus diesem Grund 4p + 1 keine Primzahl sein kann.

p	2	5	7	11	13	17	19	23	29	31	...
2p + 1	**5**	**11**	15	**23**	27	35	39	**47**	**59**	63	...
4p + 1	**9**	**21**	29	**45**	53	69	77	**93**	**117**	125	...

Dieser *Tabelle* ist weiterhin zu entnehmen, dass nicht für alle Primzahlen p auch 2p+1 eine Primzahl ist. Man kann sogar vermuten, dass für kein $p \equiv 1 \ (3)$ die Zahl 2p+1 eine Primzahl ist. Dies legt es nahe, die durchgeführte *Fallunterscheidung* vorzunehmen.
[Lies im „Arbeitsmaterial“ den Abschnitt 3.3. (Das Rechnen mit Kongruenzen).]

Aufgabe 20)

Die *Hilfsmittelfrage beim Rückwärtsarbeiten* führt auf den Satz „Wenn a|c und b|c und a, b teilerfremd, dann ab|c“ als *Beweismittel*. Wegen $1972 = 4 \cdot 17 \cdot 29$ und ggT(4; 17; 29) = 1 gelangt man zu den *hinreichenden Feststellungen* 4|z und 17|z und 29|z.
Da m|z gleichbedeutend ist mit $z \equiv 0 \ (m)$, kann man das Rechnen mit *Kongruenzen als Hilfsmittel* einsetzen.
[Wiederhole im "Arbeitsmaterial" den Abschnitt 3.3. (Das Rechnen mit Kongruenzen).]

Aufgabe 21)

Vergleiche mit Aufgabe 16). Übersetze in die *Sprache der Kongruenzen*.

G e o m e t r i e

Aufgabe 7)

Planfigur zeichnen!

Rückwärtsarbeiten! Welcher Satz hat eine analoge Behauptung? (Der Basiswinkelsatz). Woraus ließe sich daher die Behauptung (B) ableiten? (Aus $\overline{AM} = \overline{AN}$).
Woraus ließe sich diese Feststellung ableiten? Begründe! (Aus $\triangle ABM \cong \triangle ADN$, da entsprechende Seiten in kongruenten Dreiecken stets gleich lang sind.)
Zur Herleitung der *hinreichenden Feststellung* (4) dürfte ein Kongruenzsatz geeignet sein.

Vorwärtsarbeiten! Aus den Voraussetzungen lassen sich unmittelbar die *Feststellungen* (1), (2), (3) ableiten, aus denen sich dann mit Hilfe des Kongruenzsatzes sws die *hinreichende* Feststellung (4) folgern lässt.
Damit hat man einen *Lösungsplan* gefunden, der sich folgendermaßen in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten lässt:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \to \overline{AB}=\overline{AD} \\ V_1 \to \sphericalangle MBA=\sphericalangle ADN \\ V_2 \to \overline{BM}=\overline{DN} \end{array}\right\} \to \triangle ABM \cong \triangle ADN \to \overline{AM}=\overline{AN} \to \boxed{\sphericalangle NMA=\sphericalangle ANM}$$

Die *Knoten* dieses Graphen sind mit den Voraussetzungen, den abgeleiteten Feststellungen und der Behauptung belegt.
Die *Kanten* dieses Graphen sind mit den verwendeten Beweismitteln zu belegen.
Die Pfeile deuten an, dass die Feststellung an der Pfeilspitze aus den Feststellungen am Pfeilschaft ableitbar ist. Links außen stehen die *"Startgrößen"* des Problems, rechts außen seine *"Zielgröße"*.

[Lies dazu im "Arbeitsmaterial" den Abschnitt 1.4. (Das Beweisen von Sätzen) und in "Sätze" auf S.3 den Abschnitt IVa (Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke) sowie auf S.4 den Abschnitt IVc (Kongruenz von Dreiecken).]

Aufgabe 8)

Planfigur zeichnen! *RA* führt zum Satz über die Diagonalen im Parallelogramm als Hilfsmittel; *VA* führt zu dem Satz über die Mittellinie im Dreieck als Hilfsmittel.

[Lies dazu in "Sätze" den Abschnitt V. (Vierecke, Satz Z3) und den Abschnitt IVb. (Seiten und Winkel im Dreieck, Satz S6); hier führt Rückwärtsarbeiten zu einem Satz über Vierecke als günstiges Hilfsmittel.]

Aufgabe 9)

Planfigur zeichnen! Beim *Rückwärtsarbeiten* betrachtet man die Behauptung und wählt diejenige Parallelogrammeigenschaft aus, die sich vermutlich am einfachsten aus den Voraussetzungen ableiten lässt. Dies ist die Eigenschaft, dass die Diagonalen im Parallelogramm einander halbieren.
So stößt man auf die *hinreichenden Feststellungen* (2) und (5), aus denen sich die Behauptung unmittelbar ableiten lässt.
Beim *Vorwärtsarbeiten* kann das Betrachten der Voraussetzung V_1 zu folgendem Satz als *Hilfsmittel* führen: Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden teilt jede Seitenhalbierende (vom Eckpunkt aus gesehen) im Verhältnis 2:1.
Dieser Satz führt zu den *ableitbaren Feststellungen* (1) und (3).
Durch weiteres *VA* gelangt man von V_2 und (1) zur *ableitbaren Feststellung* (2), von V_3 und (3) zu (4), von (3) und (4) zu (5), womit man dann einen Weg von den Voraussetzungen zur Behauptung gefunden hat.

[Informiere dich in "Sätze" unter IVd. über eine Eigenschaft des Schnittpunkts der Seitenhalbierenden eines Dreiecks und suche im Abschnitt 6. der "Beweismittel" nach derjenigen Parallelogrammeigenschaft, die aus den gegebenen Voraussetzungen am leichtesten ableitbar ist.]

Aufgabe 10)

Planfigur zeichnen! *Bezeichnungen* V_1, V_2; ... für die Voraussetzungen einführen!
Rückwärtsarbeiten: Es ist zu zeigen, dass Strecken gleich lang sind. Bei der Suche nach Sätzen mit einer solchen Behauptung stößt man auf den Satz, dass dies der Fall ist, wenn diese Strecken entsprechende Stücke in kongruenten Dreiecken sind. (Vgl. diesbezüglich die "Beweismittel", S.2).
So gelangt man zur hinreichenden Feststellung (4), aus der sich die Behauptung ableiten lässt.
Um zu zeigen, dass (4) gilt, wird man einen der Kongruenzsätze als *Hilfsmittel* verwenden.

Der sss-Satz kann nicht verwendet werden, da das Ziel ja darin besteht, die Gleichheit zweier Strecken als entsprechende Stücke der kongruenten Dreiecke abzuleiten.
Als günstig erweist sich der wws-Satz.
(Mit Hilfe des Innenwinkelsatzes lässt sich zeigen, dass zwei Dreiecke auch dann kongruent sind, wenn sie in einer Seite und zwei beliebigen, nicht unbedingt dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen. Diese Aussage nennen wir "Kongruenzsatz wws".)
Vorwärtsarbeiten: Die benötigten hinreichenden Feststellungen (1), (2), (3) lassen sich unmittelbar aus den Voraussetzungen ableiten.
Man kann den durch kombiniertes *VA/RA* gewonnenen Lösungsplan in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten.

$$\begin{array}{llll} \text{stets: } \overline{BM}=\overline{BM} & & & \\ V_1 \to \sphericalangle DBM = \sphericalangle MBE & \to \triangle BDM \cong \triangle BEM & \to \overline{MD}=\overline{ME} & \\ V_2 \to \sphericalangle MDB=\sphericalangle BEM & & & \to \boxed{B} \\ & & \text{analog: } \overline{ME}=\overline{MF} & \end{array}$$

[Lies dazu im "Arbeitsmaterial" den Abschnitt 1.4. (Das Beweisen von Sätzen) und in „Sätze“ den Abschnitt IVc.]

Aufgabe 11)

Planfigur zeichnen! *Bezeichnungen* V_1, V_2; ... für die Voraussetzungen einführen!
Durch *Rückwärtsarbeiten* kann man zu der *hinreichenden Feststellung* $\overline{DC} = \overline{CE} = \overline{DE}$ gelangen, d.h. man müsste zeigen können, dass DEC ein gleichseitiges Dreieck ist.
Weiteres *Rückwärtsarbeiten* kann zu den hinreichenden Feststellungen $\overline{CD} = \overline{CE}$ und $\sphericalangle DCE = 60°$ führen.
Nun kann man zwar durch *Vorwärtsarbeiten* von V_3 ausgehend zu $\overline{AD} = \overline{CD}$ und $\overline{BE} = \overline{CE}$ gelangen, doch führt dies nicht zum Ziel, weil man daraus nicht $\overline{CD} = \overline{CE}$ ableiten kann. Offensichtlich benötigt man dazu noch die Voraussetzung V_1.
Es ist daher günstig, zunächst aus V_1 und V_2 mit Hilfe des Basiswinkelsatzes und des Innenwinkelsatzes die Feststellung $\alpha = \beta = 30°$ abzuleiten und V_3 für die Ableitung von $\alpha = \gamma_1$ und von $\beta = \gamma_2$ zu verwenden. Dieser Versuch führt dann zum Ziel.

Aufgabe 12)

Planfigur zeichnen! *Bezeichnungen* V_1, V_2; ... für die Voraussetzungen einführen!
Der (hier vorgegebene) Hilfspunkt F lässt sich finden, wenn man von V_3 und V_4 ausgehend auf die Idee kommt, den Satz über die Mittellinie im Dreieck als Hilfsmittel einzusetzen.
Von der ZV ausgehend gelangt man durch *VA* (m. H. des Basiswinkelsatzes) zu $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ und (m. H. des Außenwinkelsatzes) zu (2) $\sphericalangle 2 = \frac{1}{2}\alpha$. Nun führt *RA* unter Berücksichtigung des ableitbaren Teilziels (2) zum hinreichenden Teilziel (8) $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$.
Diese beiden Winkel wären gleich, wenn die Geraden MN und FB parallel wären. Dies wäre der Fall, wenn $\overline{MN}$ Mittellinie im Dreieck FBC wäre.
Da N laut V_4 der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ ist, muss nur noch gezeigt werden, dass M der Mittelpunkt von $\overline{FC}$ ist.
Dieses hinreichende Teilziel lässt sich durch *VA* erreichen.
Folgende nahe liegende Lösungsidee führt (mit den Hilfsmitteln der Klasse 7) nicht zum Ziel:
Durch *RA* gelangt man (m. H. des Außenwinkelsatzes) zum hinreichenden Teilziel $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ $(=\frac{1}{2}\alpha)$; weiteres *RA* führt zu $\overline{AE} = \overline{MA}$. Dieses hinreichende Teilziel ist ohne Hilfspunkte durch VA nicht erreichbar.

[Lies in "Sätze" die Abschnitte IVa. und IVb. über Dreiecke.]

Aufgabe 13)

Planfigur zeichnen! *Bezeichnungen* V_1, V_2; ... für die Voraussetzungen einführen!
(B_2) entnimmt man einer genauen Figur als *Vermutung*.
Um (B_1) abzuleiten, gelangt man durch *RA* zunächst zur *hinreichenden Feststellung* AB||CD.
Beim weiteren *RA* sucht man dann nach einem Satz, der AB||CD als Behauptung hat. Dies kann auf die Umkehrung des Wechselwinkelsatzes als *Hilfsmittel* führen (vgl. "Beweismittel", S.3, Abschnitt 3). So erreicht man dann die *hinreichende Feststellung* $\sphericalangle$BAC = $\sphericalangle$DCA.
Unter Beachtung von V_1 führt das zum Teilziel $\sphericalangle$CAD = $\sphericalangle$DCA, das man durch *VA* leicht erreichen kann.
Durch Betrachten von (B_2) gelangt man durch *RA* bei Verwendung der Definition des Rhombus als Hilfsmittel zur *hinreichenden Feststellung* $\overline{AE} = \overline{EC} = \overline{CD} = \overline{AD}$.
Da $\overline{CD} = \overline{AD}$ oben bereits abgeleitet wurde und da $\overline{AE} = \overline{EC}$ analog ableitbar ist, erweist sich $\overline{AE} = \overline{AD}$ als *hinreichende Feststellung.*
Die Hilfsmittelfrage beim *RA* kann dann zur "Kongruenz von Dreiecken" als Hilfsmittel und damit zur *hinreichenden Feststellung* (7) führen.
Den Rest des Lösungswegs kann man dann durch *VA* zurücklegen.

[Wiederhole dazu in "Geometrische Örter" den Begriff "Mittelsenkrechte"; lies in "Beweismittel" den Abschnitt 3. (Beziehungen zwischen Geraden) und den Abschnitt 6. (Eigenschaften von Figuren).]

Aufgabe 14)

Planfigur zeichnen! *Bezeichnungen* V_1, V_2; ... für die Voraussetzungen einführen!
Man beginne mit der *Teilzielfrage beim Rückwärtsarbeiten (Tf-RA)*:
Woraus würde die Behauptung M$\in$BD unmittelbar folgen? [$\sphericalangle$DMB = 180°]
Günstige *Bezeichnung* einführen! [$\sphericalangle$CAB = $\sphericalangle$MAB = α]
Die *Hilfsmittelfrage beim Vorwärtsarbeiten (Hf-VA)* kann dazu führen, dass man Sätze über Winkel (Basiswinkelsatz, Wechselwinkelsatz, Innenwinkelsatz) anwendet.
Hinweis: Die *Hf-VA* oder die *Hf-RA* kann auch zum Satz des Thales bzw. zu einer der beiden Umkehrungen dieses Satzes und damit zu einem besonders einfachen Beweis führen.

Aufgabe 15)

Methode der geometrischen Örter anwenden!
Beginnt man mit (b) $\overline{CH} = h_C$, dann sind C und H *gegebene Punkte* (wir tragen sie „grün" in die Planfigur ein), A und B sind dann *gesuchte Punkte* (wir tragen sie „rot" ein).
Als nahe liegender *Hilfspunkt* tritt der Mittelpunkt S von $\overline{AC}$ auf (wir tragen ihn „blau" ein).
Dann suchen wir - ausgehend von den restlichen Bedingungen (a), (c), (d), (e) - nach jeweils zwei *geometrischen Örtern* für jeden gesuchten Punkt.
[Lies dazu im "Arbeitsmaterial" den Abschnitt 2.1. (Konstruktionsaufgaben).]

Aufgabe 16)

Wir wenden zunächst die *Methode der geometrischen Örter* an:
Es ist günstig, mit Bedingung (b) zu beginnen. Dann sind A und H_a *gegebene Punkte* (wir zeichnen sie „grün" ein); dann sind B und C die *gesuchten Punkte* (wir zeichnen sie „rot" ein).
Nun suchen wir nach zwei *geometrischen Örtern* für jeden gesuchten Punkt.
Wegen Bedingung (d) ist die Senkrechte g auf AH_a durch H_a ein *1. GO* für beide gesuchten Punkte. Ein *2. GO* ist nicht unmittelbar zu finden.
RA: Würde man den *Hilfspunkt* S_a konstruieren können, dann wäre wegen Bedingung (c) und (e) der Kreis k(S_a; $\frac{a}{2}$) ein *2. GO* für die beiden gesuchten Punkte und wir wären am Ziel.
(Wir sagen, dass S_a ein *hinreichender Hilfspunkt* ist).
S_a ist auch ein *konstruierbarer Hilfspunkt,* denn die Gerade g ist ein 1. GO und wegen Bedingung (c) ist der Kreis k(A; s_a) ein *2. GO* für S_a.
Damit haben wir einen *Lösungsweg* gefunden.

Aufgabe 17)

Wie man rasch feststellt, kommt man hier nicht ohne Hilfspunkte aus.
Bei der Suche nach einer *brauchbaren Hilfsfigur* kann man auf das *Hilfsdreieck AEC* mit $\overline{AE} = a + c$ stoßen.
Es ist ein *"hinreichendes"* Hilfsdreieck: Hätte man es konstruiert, dann könnte man die dann noch gesuchten Punkte B und D konstruieren.
Ist dieses Hilfsdreieck auch *"konstruierbar"*? Zunächst noch nicht, da wir bisher nur *2 Bestimmungsstücke* kennen.
Wir suchen daher nach *Beziehungen* (oft nach Sätzen oder Formeln), die uns ein weiteres Bestimmungsstück dieses Hilfsdreiecks liefern.
Die Vermutung, dass BECD ein Parallelogramm ist, lässt sich leicht nachweisen. Daher gilt $\overline{CE} = \overline{BD} = f$, ein drittes Bestimmungsstück ist gefunden, das hinreichende Hilfsdreieck ist aus den Daten konstruierbar.

Damit ist folgender *Lösungsplan* gefunden: Mit $\overline{AC} = e$ beginnend wird erst E, dann D und schließlich B konstruiert. Es ist günstig, im Lösungsplan auch die für die Konstruktion eines jeden Punktes verwendeten geometrischen Örter festzuhalten.

$$A, C \mid \underset{k(A;\,a+c)\quad k(C;\,f)}{E}\ ,\ \underset{g\quad k(C;\,c)}{D}\ ,\ \underset{h\quad AE}{B}$$

Aufgabe 18)

Bedingung (c) legt es nahe, als *Hilfslinie* eine Strecke mit der Länge s einzuführen. Von den vier Möglichkeiten, durch Streckenabtragung eine solche Strecke zu erzeugen, ist das Verlängern von $\overline{AB}$ um $\overline{BC}$ über B hinaus die günstigste Möglichkeit.
Beginnt man mit $\overline{AE} = s$, dann sind die Punkte A und E gegeben (man zeichnet sie „grün" ein) und die Punkte B, C, D sind gesucht (man zeichnet sie „rot" ein).
Nun muss man für jeden der gesuchten Punkte *2 geometrische Örter* ermitteln. Dies gelingt - wie angegeben - in der Reihenfolge C, B, D.
Dabei muss man jeweils untersuchen, ob der Durchschnitt dieser beiden geometrischen Örter stets und auch eindeutig existiert. Dies ist bei unserer Aufgabe der Fall.

Aufgabe 19)

Da in Bedingung (a) eine Summe zweier Strecken mit der Gesamtlänge s gegeben ist, liegt es nahe, durch Streckenabtragung einen *Hilfspunkt* D so einzuführen, dass eine Strecke mit dieser Länge s entsteht.

Dabei ist es günstig, von den vier Möglichkeiten der Streckenabtragung diejenige zu wählen, bei der $\overline{BC}$ auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus angetragen wird, so dass die Strecke $\overline{AD}$ entsteht. Es entsteht ein gleichschenkliges Dreieck DCB, über das man viel aussagen kann.