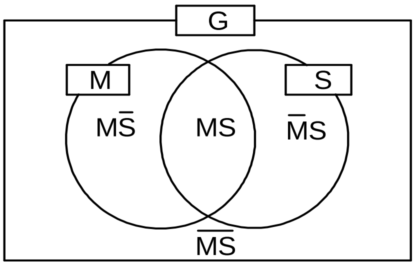
Hinweise zur Lösungsfindung und zur didaktischen Aufbereitung
Teil 2

Mengenlehre - Logik

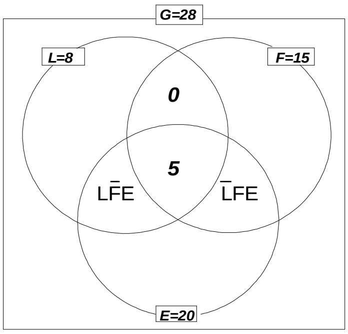
1) Bei derartigen Aufgaben sind *Mengendiagramme* ein günstiges *Hilfsmittel*. Man kann in ihnen nicht nur festhalten, welche Anzahlen von Elementen gegeben und welche gesucht sind, sondern auch berechnete Anzahlen eintragen und vor allem die für die Lösung benötigten *Beziehungen* zwischen diesen Anzahlen ablesen.



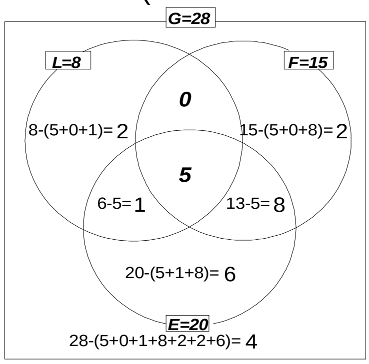
Wichtig ist das *Einführen günstiger Bezeichnungen* sowie das Beherrschen der üblichen *mengentheoretischen Schreibweise*.

Hier werden die Beziehungen $M\overline{S} = M - MS$, $\overline{M}S = S - MS$ und $G = MS + M\overline{S} + \overline{M}S + \overline{M}\,\overline{S}$ verwendet, die das Resultat G = 6 + 7 + 9 + 4 = 26 liefern.

2) Nach dem Einführen *günstiger Bezeichnungen* und dem Festhalten der Bedingungen in der *mengentheoretischen Kurzform* trägt man die gegebenen Anzahlen in ein *Mengendiagramm* ein. Da dies für die durch die Bedingungen (e) und (f) gegebenen Anzahlen nicht unmittelbar möglich ist, hält man sie gesondert fest (siehe linke Abbildung).



Geg.: LE = 6, FE = 13



Dann versucht man durch *Vorwärtsarbeiten* die noch leeren Felder des Diagramms zu füllen. Die hierfür benötigten *Beziehungen* entnimmt man dem Mengendiagramm.

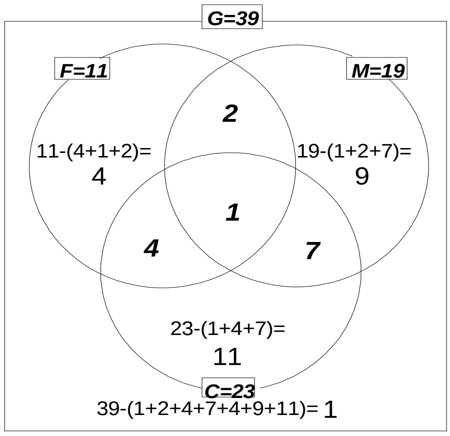
Wegen $LE = LEF + L\overline{F}E$ gilt $L\overline{F}E = 6 - 5 = 1$,

wegen $FE = LEF + \overline{L}FE$ gilt $\overline{L}FE = 13 - 5 = 8$, usw.

Dem rechts abgebildeten Diagramm ist unmittelbar zu entnehmen, dass genau 4 Schüler keine der drei Fremdsprachen lernen.

Folglich lernen (28 - 4 =) 24 Schüler mindestens eine der drei Fremdsprachen, usw.

3) Im nebenstehenden *Mengendiagramm* sind die gegebenen Anzahlen „kursiv-fett“ eingetragen. Um die in der Aufgabe gestellten Fragen beantworten zu können, müssen die in den restlichen Feldern stehenden Zahlen wie angegeben berechnet werden.



4) Hier führt folgende *vollständige Fallunterscheidung* zum Ziel: Die antwortende Person ist stets entweder ein Wombie oder ein Zombie.
Es reicht aber nicht aus nachzuweisen, dass eine der beiden Annahmen wahr ist; es muss auch gezeigt werden, dass die andere Annahme zu einem Widerspruch führt und daher falsch sein muss.

Zahlen werden gesucht

11) In Teil a) ist zunächst der letzte Summand, in Teil b) die Differenz und die Anzahl der Summanden zu berechnen, bevor man der Wert der Summe ermitteln kann.

12) Hinweis auf die *Analogie* zur Aufgabe 11)

13) Hier ist es günstig, zunächst a mit Hilfe des Satzes über die Differenz des letzten und des ersten Summanden der Summe zu ermitteln. Ferner muss man erkennen, dass der n-te Summand durch $[a + d\cdot(n - 1)]$ ausgedrückt wird.

14) *Übersetzen in die Sprache der Gleichungen*. Das *Verfahren des Erstklässlers Gauß* anwenden.

15) *Folgern* aus den gegebenen Bedingungen; *Verfahren des Erstklässlers Gauß*; *systematisches Erfassen aller Möglichkeiten.*

16) Übersetzen in die *Sprache der Gleichungen.* Hier ist die *Reihenfolge* wichtig, in der die benötigten *Hilfsgrößen* d, a_1 und a_{17} berechnet werden.

Kombinatorik

11) Aneignen einer *Definition* für P(E); *systematisches Probieren* (Ermitteln aller möglichen Fälle); *Tabellen* als Hilfsmittel auch bei der Darstellung der Lösung.

12) Hinweis auf die *Analogie* zur Aufgabe 11); dem Hinweis „in einem Griff“ ist zu entnehmen, dass die Reihenfolge der Karten keine Rolle spielt.

13) Definition *„Wahrscheinlichkeit“* aneignen. *Tabellen* zum übersichtlichen Festhalten der Ausgänge verwenden.
Teil c) hat nichts mit Kombinatorik / Wahrscheinlichkeit zu tun; hier führt das *Extremalprinzip* zum Ziel.

14) *Tabelle* als Hilfsmittel auch bei der Darstellung der Lösung.

15) Nach wie vielen Würfen ist das Spiel mit Sicherheit beendet? [Nach 2 Würfen, weil im 1. Wurf W fallen könnte, was zum noch nicht entschiedenen Spielstand 4 : 4 führen würde.]
Ermittle die Anzahl der *möglichen* Fälle (auch wenn das Spiel schon entschieden ist) und die Anzahl der *günstigen* Fälle für die beiden Spieler.

16) *Tabellen* als Hilfsmittel auch beim Darstellen der Lösung.
Man achte darauf, dass der Schüler beim *systematischen Erfassen aller Fälle* streng ein *Ordnungsprinzip* verfolgt (lexikographisch, der Größe nach, o.ä.).
Man beachte, dass die Farben zu geordneten Paaren führen.

17) Bei dieser letzten Kombinatorik-Aufgabe kann man überprüfen, ob der Schüler die angewendete *Lösungsmethode* bereits beherrscht. Wenn nicht, dann sollte er sich nochmals mit den Aufgaben 2c), 5), 6), 8) und 9) aus dem Teil 1 beschäftigen, bei denen diese Lösungsmethode ebenfalls zum Ziel führt.

Geometrie

1) Es ist auf mehrere Weisen möglich, die Anzahl der Gitterpunkte auf der Oberfläche durch „Abzählen“ zu ermitteln. Betrachtet man nacheinander Paare von zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels, dann erhält man $(2\cdot 5\cdot 5 + 2\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 3\cdot 3 = 50 + 30 + 18 =)$ 98 Gitterpunkte.
Um zu der *Verallgemeinerung* zu gelangen, ist es jedoch erforderlich zu erkennen, dass die Summe der inneren Gitterpunkte und der Gitterpunkte auf der Oberfläche gleich der Anzahl der Gitterpunkte des Würfels ist.

2) Die Lösung lässt sich durch *Probieren* ermitteln, wenn man erkannt hat, dass $a : b = 4 : 3$ gelten muss. In diesem Fall soll der *Probiertabelle* auch zu entnehmen sein, dass es keine weitere Lösung geben kann. Als naheliegenden Einstieg wird man $a = 4$ cm und $b = 3$ cm wählen.

a	$b = \frac{3}{4}\cdot a$	$A_k = a\cdot b$	$A_g = 7\cdot A_k$	Vgl. mit 2100 cm²
4 cm	3 cm	12 cm²	84 cm²	zu klein
...	...	...	...	...
16 cm	12 cm	192 cm²	1344 cm²	zu klein
20 cm	**15 cm**	**300 cm²**	**2100 cm²**	**gleich**
24 cm	18 cm	432 cm²	3024 cm²	zu groß

Da der Flächeninhalt immer größer wird, kann die Probiertabelle hier abgebrochen werden. Der Schüler sollte einsehen, dass bei dieser Aufgabe das *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* die angemessenere Lösungsmethode ist.

3) Hier ist die Idee, in der *Abbildung* die Teilkörper „auseinandergerückt“ darzustellen, sehr nützlich.
Zur Lösung von Teil b) kann man auch die Oberflächen der 8 Teilkörper berechnen und deren Summe bilden. Wegen
$1\cdot 6\cdot 20^2 + 3\cdot(2\cdot 20\cdot 20 + 2\cdot 20\cdot 40 + 2\cdot 20\cdot 40) + 3\cdot(2\cdot 20\cdot 40 + 2\cdot 20\cdot 40 + 2\cdot 40\cdot 40) + 1\cdot 6\cdot 40^2 = 43200$ kommt man zum gleichen Ergebnis. Auf diese Weise gelangt man jedoch nicht zur Lösung von Teil c).

4) Hier geht es um das *Entdecken einer Gesetzmäßigkeit.*

5) Hier führt nicht die Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks zum Ziel, sondern *Flächenzerlegung* und *Flächenergänzung.*

6) Bei dieser leichten Aufgabe kommt man durch *Rückwärtsarbeiten* zu den *hinreichenden Hilfsgrößen* Va und Vi, die durch *Vorwärtsarbeiten* leicht erreichbar sind.

7) *Günstige Bezeichnungen* einführen.
Die *Hilfsmittelfrage beim RA* führt zur Umfangsformel und diese zur *hinreichenden Hillfsgröße* a.
Weiteres *RA* führt über die Volumenformel zur *Hilfsgröße V* und dann zu den Hilfsgrößen V_1 und V_2.
Dann führt *VA* zu den *hinreichenden Hilfsgrößen*.
Die Darstellung in Form eines *Lösungsschemas* und die Angabe des zugehörigen *Lösungsgraphen* soll wieder einmal an die *logische Struktur* einer Lösung erinnern.
Hier ist es zweckmäßig, mit *Maßzahlen* zu rechnen. Das führt in der Lösung dazu, dass die Variablen in den Gleichungen als Zahlenvariable, in den Begründungen dagegen als Größenvariable vorkommen. Dieser Mangel ließe sich beseitigen, indem man für die Zahlenvariablen neue Zeichen einführt. In Klasse 6 nehmen wir diesen Mangel jedoch bewusst in Kauf.

8) *Bezeichnungen* einführen; günstige *Abbildung* anfertigen; *RA/VA*; *Lösungsschema.*

Verschiedene Aufgaben

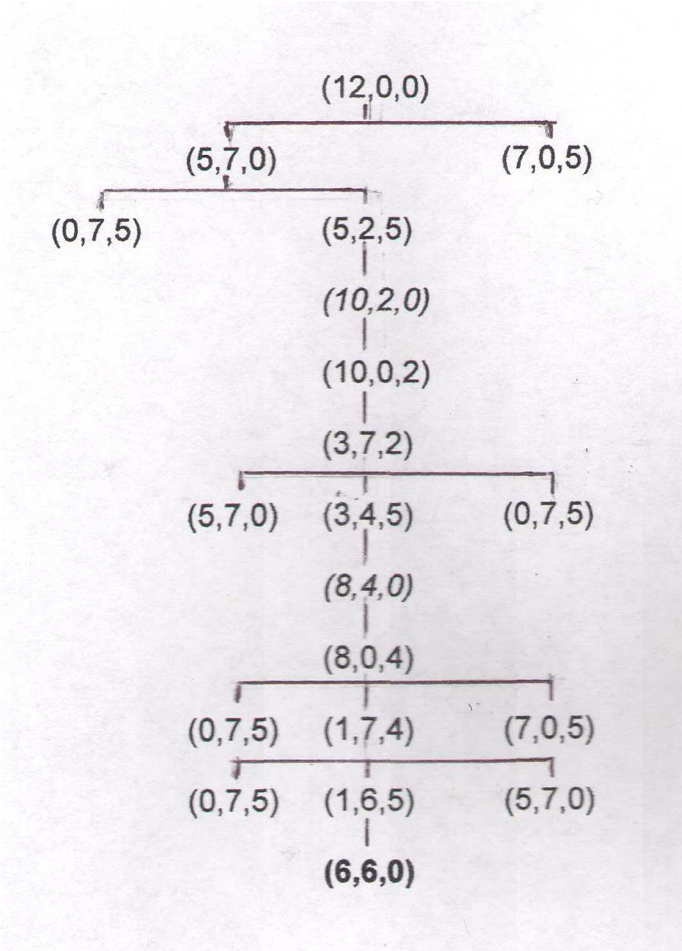
8) *Analogie* zur Aufgabe 6) aus Teil 1, bei welcher der *Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit* einer Aufgabe gefordert wird und die Darstellung der Lösung die *Teile I. und II.* enthält.
Es ist günstig, am Anfang der Darstellung der Lösung die Bedingungen (a) bis (d) nach Wahl günstiger *Bezeichnungen* abgekürzt in Form einer *Symbolsprache* nochmals festzuhalten.
Hier ist es notwendig, nach der *informativsten Bedingung* zu suchen und zu erkennen, dass die Bedingungen optimal in der Reihenfolge (c), (b), (a) heranzuziehen sind.

9) Hier soll der Schüler erkennen, dass das bereits bei der Kombinatorik-Aufgabe 13c) eingesetzte *Extremalprinzip* wieder helfen kann. Entscheidend ist die Idee, dass man für die Anzahl der grünen Kugeln eine obere Grenze finden muss.
Offensichtlich ist (a) die *informativste Bedingung*, dann folgen die Bedingungen (c) und (d), aus denen man folgern kann, dass g = 7 gilt.

10) Bei Teil a) führt das *systematische Erfassen aller möglichen Fälle* zum Ziel.
Bei den Teilen b) und c) führt *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* ans Ziel. Dabei ist sowohl bei der Lösungsfindung als auch beim Darstellen der Lösung eine *Tabelle hilfreich*.

11) Wir betrachten den ersten Lösungsweg.
RA: Welche Zielfüllstände gibt es? [Genau einen, die (6, 6, 0).]
Weiteres *RA* ist nicht sinnvoll, weil schon der nächste Schritt zu 10 verschiedenen Füllständen führt.

VA: Welche Füllstände lassen sich vom Ausgangsfüllstand ausgehend jeweils im nächsten Schritt erreichen?
[Nach (5, 7, 0) im 1. Schritt, dann (0, 7, 5) und (5, 2, 5) im 2. Schritt]
Es ist klar, dass man niemals zu einem Füllstand übergehen wird, der bereits einmal aufgetreten ist.
Es liegt nahe, im 2. Schritt zu (5, 2, 5) überzugehen, weil man durch die neu auftretende 2 dann im 3. Schritt zu dem neuen Füllstand (10, 2, 0) übergehen kann, während dies von (0, 7, 5) ausgehend nicht möglich ist.
Von (10, 2, 0) ausgehend kann man keine neue Zahl erzeugen, als nächster Füllstand kommt nur (10, 0, 2) in Frage.
Dieser Strategie folgend gelangt man zwangsläufig zur (6, 6, 0) und kann auch den zweiten Lösungsweg auf diese Weise finden.



12) *Folgern*; Umrechnen von Größen.

13) Hier sind *Tabellen* sowohl bei der Lösungsfindung als auch für die Darstellung gut geeignet. *Bruchrechnung* wird benötigt.

14) Eine *Abbildung* ist erforderlich. Die Teile a) und b) sind im Prinzip durch *Abzählen* lösbar, der schwierige Teil c) jedoch nur durch *Folgern.* Man sollte den Schüler ermuntern, auch beim Darstellen der Lösung von Teil b) Folgerungen zu verwenden.

15) Es ist nützlich, zunächst eine hinreichende Anzahl von Lösungen der Gleichung $7 \cdot m + 12 \cdot n = p$ zu betrachten, um die in der Aufgabenstellung gegebene Information zu überprüfen. Dabei ist folgende *Tabelle* ein geeignetes Hilfsmittel:

n/m	0	1	2	3	4	5	6	...	12	13
0	0	7	14	21	28	35	42	...	***84***	***91***
1	12	19	26	33	40	47	54	...		
2	24	31	38	45	52	*59*	**66**	...		
3	36	43	50	*57*	**64**	71	78			
4	48	55	62	69	76	83				
5	*60*	**67**	74	81	88					
6	72	79	86	93						
7	***84***	***91***	98							

So erkennt man leicht, dass die 65 tatsächlich fehlt, dass als nächst kleinere Zahl die 58 fehlt. Die Zahlen 56 und 63 erhält man, wenn man die Zeile für $n = 0$ fortsetzt und die Zahl 61, wenn man die Zeile für $n = 1$ fortsetzt.
Mit etwas Fleiß findet man auch die ersten beiden „guten“ Preise.
Es wäre jedoch unangemessen, auch noch weitere „gute“ Preise durch *systematisches Probieren* zu ermitteln. Vielmehr sollte man den Schüler ermutigen, auch die Teile a) und b) durch *Folgern* zu lösen.