Hinweise zur Lösungsfindung und Darstellung der Lösung
Teil 1

Ermitteln von Zuordnungen und Anordnungen -

<u>Allgemeine Hinweise</u>

Bei den Aufgaben 1) bis 9) sind folgende Impulse nützlich:
Günstige Bezeichnungen einführen; den Aufgabentext in die *Sprache der Gleichungen oder Ungleichungen* übersetzen.
Folgern aus gegebenen *Bedingungen*; *Begründungen* nicht vergessen!
Den (der Fragestellung angepassten) *Antwortsatz* nicht vergessen!
Tabellen nur dann als Hilfsmittel einsetzen, wenn der Schüler die Aufgabe nicht selbständig lösen kann.
Auch wenn der Schüler die Aufgabe selbständig gelöst hat, sollte man ihn anhalten, zum Vergleich die angegebene Lösung durchzuarbeiten und die vorgeführte Art der Darstellung der Lösung beim Lösen der nächsten Aufgaben nachzuahmen.

1) Zusätzliche Frage: Welche der in (a), (b) und (c) enthaltene Information wird für die Lösung nicht benötigt? [In (a): ... während der dritte Herr aus Dresden kommt].
Den Hinweis auf eine Probe am Text erläutern und die *Probe am Text* (mündlich) durchführen lassen.

2) Hervorheben der starken *Analogie* zur 1).

3) Diese Aufgabe ist etwas schwieriger, weil (a) und (b) jeweils 4 *Teilinformationen* enthalten, die an verschiedenen Stellen der Lösung benötigt werden.
Deshalb kann es hilfreich sein, diese Informationen zunächst in zwei *Tabellen* übersichtlich festzuhalten und hieraus dann in einer günstigen Reihenfolge *Folgerungen* zu ziehen:

Eintreffen	1.	2.	3.	4.
Bedingung (a)	H	c	E	b

Geschenke	Wü	Ku	Ro	Bu
Bedingung (b)	H	a	b	G

$H \neq c$ und $H \neq b$; $E \neq c$ und $E \neq b$ $H \neq a$ und $H \neq b$; $G \neq a$ und $G \neq b$
Hieraus ist leicht zu erkennen, wie die oben angegebene Lösung gefunden wurde.

4) Hier sind *Zuordnungstabellen* ein günstiges Hilfsmittel.
Man helfe dem Schüler, das Material „*Tabellen als Hilfsmittel beim Lösen von Zuordnungsaufgaben*" durchzuarbeiten. Dort erfährt er, dass bei einer solchen Aufgabe drei Zuordnungstabellen nützlich sind.
Aus (a) allein lässt sich keine Folgerung ziehen; aus (b) und (d) lassen sich jeweils drei Folgerungen ziehen, die man in die Tabellen einträgt.
Spätestens beim zweiten Durchlesen der Bedingungen erkennt man leicht, dass man aus (a) und (c) eine wichtige Folgerung ziehen kann (siehe die folgenden drei Tabellen).

	De	En	Fr
A		- (d)	
B			- (b)
C			

	g	h	i
A	-(a),(c)	- (d)	
B	- (b)		
C			

	g	h	i
De			
En		- (d)	
Fr	- (b)		

Nun kann man sehr leicht die mittlere Tabelle ganz ausfüllen.
Da sich aus keiner der beiden restlichen Tabellen allein weitere Folgerungen ableiten lassen, muss man nun aus den in mehreren Tabellen festgehaltenen Folgerungen weitere Folgerungen ziehen. Dies ist auf mehrere verschiedene Weisen möglich.

Aus A ≠ En in der linken Tabelle und A = i in der mittleren Tabelle folgt (4) En ≠ i in der rechten Tabelle.
Aus B ≠ Fr in der linken Tabelle und B = h in der mittleren Tabelle folgt (6) Fr ≠ h in der rechten Tabelle.

	De	En	Fr
A		- (d)	
B			- (b)
C			

	g	h	i
A	- (a),(c)	- (d)	+ (1)
B	- (b)	+ (3)	- (1)
C	+ (2)	- (2)	- (1)

	g	h	i
De			
En	+ (5)	- (d)	- (4)
Fr	- (b)	- (6)	

Der Rest ist einfach.

5) Man weise die Schüler auf die *Analogie* zur ZA4) hin, bei der Tripel einander zuzuordnen waren, während es bei dieser Aufgabe um Quadrupel geht.
Nachdem man die unmittelbaren Folgerungen aus den gegebenen Bedingungen in die drei *Zuordnungstabellen* eingetragen hat, bemerkt man, dass man auf diese Weise keine dieser Tabellen ganz ausfüllen kann.

	Qu	Ro	Tü	St
A			- (a)	- (a),(b)
B		- (d)	- (a),(b)	- (b)
C				- (c)
D				

	Ku	Ma
A	+ (a)	- (a)
B	- (b)	+ (b)
C		
D		

	Qu	Ro	Tü	St
Ku				- (b)
Ma				+ (b)

Entscheidend ist die Erkenntnis, dass man mit den Informationen aus der mittleren und der rechten Tabelle die beiden fett umrandeten Felder der linken Tabelle füllen kann (vgl. die 3. und die 6. Beweiszeile mit A ≠ St. und B ≠ Tü). Der Rest ist einfach.

6) Nachdem man die unmittelbaren Folgerungen aus den Bedingungen (a) bis (f) in die 5x5-*Zuordnungstabelle* eingetragen hat, stellt man fest, dass man nur die Zuordnung (1) B = r ermittelt hat, dass (d) noch nicht verwendet wurde und dass (f) „überflüssig“ ist, weil O ≠ r aus (1) folgt. Der Stand der bisherigen Ermittlung wird in der linken Tabelle festgehalten.

	w	g	s	b	r
B	- (a)	- (b)	- (b)	- (c)	+ (1)
A	- (a)				- (1)
P	- (a)		- (e)		- (1)
F		- (b)	- (b)		- (1)
O					- (1),(f)

	w	g	s	b	r
B	- (a)	- (b)	- (b)	- (c)	+ (1)
A	- (a)	- (a),(d)	+ (3)	- (2)	- (1)
P	- (a)	- (a),(d)	- (e)	+ (2)	- (1)
F	+ (4)	- (b)	- (b)	- (2)	- (1)
O	- (4)	+ (5)	- (3)	- (2)	- (1),(f)

Da (d) noch nicht verwendet wurde, wird man nach einer Bedingung suchen, die inhaltlich etwas mit (d) gemeinsam hat. Dies ist - wegen des „Parkdecks“ - die Bedingung (a).
Auf diese Weise kann man erkennen, dass sich die fett umrahmten Felder in der linken Tabelle mit $A \neq g$ bzw. $P \neq g$ füllen lassen. Der Rest ist einfach.
Dies ist die erste Aufgabe, bei der dem Aufgabentext nicht zu entnehmen ist, dass es genau eine Lösung gibt, sondern bei der die *eindeutige Existenz einer Lösung* nachzuweisen ist.
Dass hier zusätzlich zur *Herleitung (Einzigkeitsnachweis)* noch eine *Probe (Existenznachweis)* nötig ist, lässt sich an dieser Aufgabe gut erklären. Würde man in (f) die Farbe „rot“ durch eine der anderen vier Farben ersetzen, dann würde sich an der Herleitung nichts ändern, da (f) ja nicht benötigt wird. Dass (f) dem aus (a), (b) und (c) abgeleiteten (1) widerspricht, kann man nur bei der hier erforderlichen Probe erkennen.
Dem Schüler sollte der in der Lösung angegebene „Hinweis“ erläutert werden.
Um die Schüler daran zu gewöhnen, eine Lösung stets als eine Folge begründeter Folgerungen darzustellen, haben wir bisher stets ein und dieselbe Form eines *„Lösungsschemas“* verwendet. Bei dieser Aufgabe wird gezeigt, dass es natürlich auch andere Formen einer vollständigen und korrekten Darstellung einer Lösung gibt.

7) Durch den Teil b) wird der Schüler auf folgende Schwierigkeit dieser Aufgabe aufmerksam gemacht: „A > F“ erfasst nicht den vollen Inhalt der Bedingung (c) und reicht daher nicht aus, um die gesuchte Platzierung zu ermitteln.

8) Bei dieser Aufgabe gelingt es nicht, durch Folgern aus den gegebenen Bedingungen in der angegebenen Reihenfolge bereits beim ersten „Durchgang“ ans Ziel zu gelangen.
Hier ist folgender Impuls nützlich:
Mit welcher besonders *informativen Bedingung* sollte man beginnen? Was lässt sich dann aus der *gefolgerten Feststellung* und weiteren Bedingungen schlussfolgern?
Die in Teil b) verwendete *Tabelle* sollte man schon bei der Lösungsfindung verwenden, um die erreichten Teilziele festzuhalten.
Man sollte die *Analogie* zur Aufgabe ZA7) hervorheben, bei der ebenfalls (erstmals) der Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit verlangt wurde.

9) Man weise den Schüler auf die *Analogie* zur Aufgabe ZA8) hin.

Sachaufgaben

<u>Allgemeine Hinweise</u>

Bei vielen der Aufgaben S1) bis S14) führt auch *systematisches Probieren* zum Ziel.
Wir wollen jedoch erreichen, dass Schüler der Klasse 6, die sich auf einen Start bei der Landesolympiade vorbereiten, bei allen derartigen Aufgaben lernen, *Variable* einzuführen und den Text der Aufgabe in die *Sprache der Gleichungen* zu übersetzen.
Man wird den Schüler auffordern, sich rechtzeitig mit dem Material „*Lösen von Gleichungen*“ zu beschäftigen.
Bei den Aufgaben zum Ermitteln von Zuordnungen und Anordnungen werden die gegebenen Bedingungen im Aufgabentext stets explizit angegeben und mit (a), (b), ... bezeichnet. Bei den Sachaufgaben soll der Schüler lernen, diese Bezeichnungen selbst einzuführen und beim Darstellen der Lösung zu verwenden.

1) Hier führt das *Übersetzen in die Sprache der Gleichungen* zu einer diophantischen Gleichung mit 2 Variablen (Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen), die von Schülern der Klasse 6 nur durch *systematisches Probieren (Erfassen aller möglichen Fälle)* gelöst werden kann.
Man achte darauf, dass der Schüler begründet, warum keine weiteren Fälle eintreten können.

2) Der angegebenen Lösung von Teil a) ist zu entnehmen:
Wenn man die Feststellung (1) aus den gegebenen Bedingungen (b) und (d) hergeleitet hat, dann kann man nicht nur z und e sondern auch a durch p ausdrücken. Das ermöglich eine *kürzere Darstellung* der Lösung, indem man die Anzahl der Pfefferminzkaugummis mit x bezeichnet und den Aufgabentext durch die Gleichung (2) mit einer Variablen festhält.
Bei den Teilen b) und c) wird man die Möglichkeit nutzen, den Schüler mit dem *Extremalprinzip* bekannt zu machen und ihn auffordern, selbst *analoge Aufgaben* zu formulieren und zu lösen.

3) *Analoges Vorgehen* wie bei den Aufgaben 1) und 2), lediglich höhere Anforderungen beim Lösen einer Gleichung.

4) Beim Übersetzen in die Sprache der Gleichungen wird die *Beziehung* benötigt, dass x genau dann durch eine Zahl teilbar ist, wenn x ein Vielfaches dieser Zahl ist. Analog verläuft die Lösung für $n = 21 - m$.

5) Hier gibt es *verschiedene Lösungswege*. Es ist geschickt, nicht die im Text gegebenen entnommenen Anteile, sondern sofort die hieraus folgenden verbliebenen Anteile zu betrachten. Dabei wird verwendet: Wenn man 1/3 entnimmt, dann bleiben 2/3 zurück.
Bei dieser Aufgabe werden erstmals Kenntnisse aus der *Bruchrechnung* vorausgesetzt.

6) Da sich alle Bestandteile auf Paranüsse beziehen, ist es günstig, mit dieser Anzahl zu beginnen und deren Anzahl mit einer *Variablen* zu bezeichnen. Ferner ist es günstig, die gegebenen Größen und Beziehungen in einer *Tabelle* übersichtlich festzuhalten, um hieraus Folgerungen zu ziehen. Auch bei der Darstellung der Lösung kann man eine solche Tabelle verwenden.

8) Hier kommt es auf eine *geschickte Variablenwahl* an.
Der Schüler sollte jedoch, wie bisher gewohnt, den Aufgabentext zunächst durch Gleichungen mit mehreren Variablen festhalten: $s_1 + s_2 + s_3 = 20$ m, $s_1 = 2 \cdot s_2$, $s_3 = 3s_1$.
Dann kann er erkennen, dass man für $s_1 = x$ zu $s_2 = \frac{1}{2}x$ und $s_3 = 3 \cdot x$ und folglich zur Ansatzgleichung $x + \frac{1}{2} \cdot x + 3 \cdot x = 20$ m gelangt, die „komplizierter“ ist, als die oben verwendete Ansatzgleichung. Offensichtlich wäre es noch ungeschickter, wenn man $s_3 = x$ wählen würde, weil dies zur Ansatzgleichung $\frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{6} \cdot x + x = 20$ m führt.
Eine derartige geschickte Variablenwahl hat bei einigen derartigen Aufgaben den Vorteil, dass die Darstellung der Lösung kürzer wird.

Zahlen werden gesucht

<u>Allgemeine Hinweise</u>

Bei den Aufgaben 1) bis 9) stehen das *Übersetzen in die Sprache der Gleichungen* und das Lösen dieser Gleichungen im Vordergrund.
Beim *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* ist es oft wichtig, die *„informativste“ Bedingung* zu finden, mit der man das Folgern beginnen sollte.
Es gibt einige Aufgaben, wo man ohne *systematisches Probieren* nicht auskommt. Aber auch hier sollte man stets versuchen, durch *Folgern* die Anzahl der zu betrachtenden Fälle so weit wie möglich einzuschränken.
Wenn die gegebenen Bedingungen nicht schon in der Aufgabe mit (a), (b), (c), ... bezeichnet sind, dann ist dies vom Schüler zu fordern. Manchmal ist es nützlich, die in Textform formulierten Bedingungen in eine *Symbolsprache* zu übersetzen.
Mit Ausnahme der 1), 2) und 9) sind die Aufgaben so formuliert, dass ein *Einzigkeitsnachweis I.* und ein *Existenznachweis II.* erforderlich sind.

1) Hier ist (c) die *informativste Bedingung.* Bei der Darstellung das *begründete Folgern* hervorheben.

2) Bei der 2a) führt *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* zum Ziel.
Bei der 2b,c) führt *systematisches Probieren* bei Verwendung einer *Tabelle* zum Ziel.
Die Erfüllungsmenge der Bedingung (a) enthält 9 Elemente, die Erfüllungsmengen der Bedingungen (b_1), (b_2) und (b_3) dagegen nur 1, 6 bzw. 4 Elemente. Folglich ist die Bedingung (b) stets *informativer* als die Bedingung (a), und man sollte sowohl beim Folgern als auch beim systematischen Probieren mit Bedingung (b) beginnen.

3) Das *Folgern* mit Bedingung (c) beginnen. Bei der Darstellung auf die Notwendigkeit von I., II. hinweisen.

4) *Analogie* zur Aufgabe Z3); höherer Schwierigkeitsgrad beim Umformen von Gleichungen.

7) Den Satz über die Division mit Rest (die Grundgleichung der Zahlentheorie) wiederholen.
Beachte, dass die Struktur I., II. beachtet ist, ohne zu kennzeichnen.

10)
Teil a)
Da man weiß, dass das Ergebnis stets gleich ist, kann man das Ergebnis für einen *Spezialfall*, etwa für die Ziffern 1, 2, 3 mit der Ziffernsumme $s_1 = 1+2+3 = 6$ ermitteln.
Welches *Ordnungsprinzip* willst du beim *systematischen Ermitteln* aller zweistelligen Zahlen aus diesen Ziffern verwenden? [„der Größe nach"]
Wie lautet die Summe dieser Zahlen? [$s_2 = 12+13+21+23+31+32 = 132$]
Wie lautet der Quotient aus s_2 und s_1? [132 : 6 = 22]

Teil b) Wähle *günstige Bezeichnungen* und *übersetze* die Aufgabe *in die Sprache der Gleichungen*! Gehe *analog* vor wie in Teil a).
[Die Ziffern heißen a, b, c und es gelte $a < b < c$; dann lautet die Ziffernsumme
$s_1 = a + b + c$; die Summe der *lexikografisch geordneten* sechs zweistelligen Zahlen lautet
$s_2 = \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{ca} + \overline{cb}$].

Wie lässt sich eine zweistellige Zahl $\overline{xy}$ darstellen? [$\overline{xy} = 10 \cdot x + y$]

Wie lässt sich die Summe s_2 *geschickt* berechnen? [Man schreibt die sechs Zahlen untereinander, man berechnet zuerst die Summe der Einer und erhält $2 \cdot (a+b+c)$, also $2 \cdot s_1$; dann berechnet man die Summe der Zehner und erhält $2 \cdot 10 \cdot (a+b+c)$, also $20 \cdot s_1$; folglich gilt $s_2 = 2 \cdot s_1 + 20 \cdot s_1 = 22 \cdot s_1$.]
Wie lautet folglich das Ergebnis? [$s_2 : s_1 = 22$]

Kombinatorik

1) *Systematisches Ermitteln aller möglichen Fälle*; *lexikografische Anordnung*; Baumdiagramm.

2) Hier soll sich der Schüler die angegebenen beiden Herleitungen aneignen und die Definition von „n-Fakultät" kennenlernen.

3) *Folgern* aus den gegebenen Bedingungen.
Es ist auch korrekt, wenn die durch *systematisches Probieren* ermittelten (lexikografisch geordneten) 16 Tripel angegeben werden, die mit (S_1, H_1, N_1), (S_1, H_1, N_2), ... beginnen und mit ... (S_2, H_4, N_1), (S_2, H_4, N_2) enden.
Man sollte dem Schüler jedoch erläutern, warum der oben angegebene Lösungsweg der angemessenere ist und daher für die Darstellung der Lösung gewählt werden sollte.

6) Hinweis auf die Analogie der Aufgabe 6abc) zur Aufgabe 5).

7) Hinweis auf die *Analogie* zur Aufgabe 4).

11) Aneignen einer *Definition* für P(E); *Systematisches Probieren* (Ermitteln aller möglichen Fälle); *Tabellen* als Hilfsmittel auch bei der Darstellung der Lösung.

12) Hinweis auf *Analogie* zur Aufgabe 11).

Verschiedene Aufgaben

2) Hier bietet es sich an, sowohl bei der Suche nach einer Lösung als auch bei der Darstellung der Lösung eine *Tabelle* zu verwenden.

4) Hier ist (b) die *informativste Bedingung*, dann kommen (c) und (a).
Als wichtige *Hilfsgrößen* erweisen sich die Zeiten, die für das Zurücklegen von 1 km, 4 km und 6 km benötigt werden. Deren Ermittlung gehört an den Anfang der Darstellung.
Hier sind *Tabellen* nicht nur bei der Suche nach einer Lösung sondern auch bei deren Darstellung nützlich.

6) Hier soll der Schüler erkennen, dass das bereits bei der S2bc) eingesetzte *Extremalprinzip* wieder helfen kann. Entscheidend ist die Idee, dass man für die Anzahl der grünen Kugeln eine obere Grenze finden muss.
Offensichtlich ist (a) die *informativste Bedingung*, dann folgen die Bedingungen (c) und (d), aus der man folgern kann, dass $g \leq 7$ gilt.

7) *Analogie* zur ZA6), bei der erstmals der Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit einer Aufgabe gefordert wird und die Darstellung der Lösung die Teile I. und II. enthält.
Es ist günstig, am Anfang der Darstellung der Lösung die Bedingungen (a) bis (d) nach Wahl günstiger *Bezeichnungen* abgekürzt in Form einer *Symbolsprache* nochmals festzuhalten.
Hier ist es notwendig, nach der *informativsten Bedingung* zu suchen und zu erkennen, dass die Bedingungen optimal in der Reihenfolge (c), (b), (a) heranzuziehen sind.

8) Der „Routine“ folgend liegt es nahe, die gesuchte Anzahl der Murmeln mit der *Variablen* x zu bezeichnen und sich die Aufgabenstellung anhand einer *Tabelle* zu veranschaulichen. Dies würde zu folgender Tabelle führen:

	Anzahl vor dem Spiel	Verlust	Anzahl nach dem Spiel
1. Spiel	x	$\frac{1}{3}\cdot x + 2$	$x - (\frac{1}{3}\cdot x + 2) = \frac{2}{3}\cdot x - 2$
2. Spiel	$\frac{2}{3}\cdot x - 2$	$\frac{1}{4}\cdot(\frac{2}{3}\cdot x - 2) + 3$	$(\frac{2}{3}\cdot x - 2) - [(\frac{1}{4}\cdot(\frac{2}{3}\cdot x - 2) + 3] = \ldots\ldots$

Dies führt zwar im Prinzip zum Ziel, allerdings über eine relativ *komplizierte Ansatzgleichung*. Hier lohnt es, die Routine zu verlassen und nach einer anderen Lösungsidee zu suchen. Dies ist hier das *Rückwärtsrechnen*. Man betrachtet zunächst das 2. Spiel mit der Anzahl y vor dem Spiel, was den Vorteil hat, dass man y sofort über eine *einfache Ansatzgleichung* berechnen kann.