A u f g a b e n - T e i l 1

Sach- und Anwendungsaufgaben

1) Der Sturm hat in der Nacht den Apfelbaum geknickt. „Der Baum ist sicherlich schon alt?“, fragt Erich seinen Vater. Der Vater holt ein vergilbtes Familienalbum aus dem Schrank, schlägt es auf und zeigt auf ein Bild. „Sieh her! Das ist dein Ururgroßvater. Auf dem Bild ist er 30 Jahre alt und pflanzt gerade den Baum.“ Der Vater deutet auf ein zweites Bild. „Hier feiern dein Urgroßvater und dein Großvater miteinander. Es ist 60 Jahre später als das erste aufgenommen worden. Auf diesem Bild sind sie zusammen 100 Jahre alt gewesen.“ „Und wann war das?“, fragt Erich.
Der Vater antwortet: „Wenn dein Urgroßvater heute noch leben würde, dann wären er, dein Großvater, du und ich zusammen 180 Jahre alt“. Er fügt noch hinzu: „Wenn du einmal so alt sein wirst wie ich jetzt bin, dann wären wir vier zusammen sogar 300 Jahre alt.“ „Und ihr beiden wäret dann zusammen 100 Jahre alt“, bemerkt der ältere Sohn Max. „So, jetzt weiß ich auch, wann der Apfelbaum gepflanzt wurde“, tönt Max stolz.

Vor wie vielen Jahren war das der Fall? Wie alt ist Erich, und wie alt ist sein Vater?

2) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 177. Teilt man die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, dann erhält man den Quotienten 3 und den Rest 9.

Wie heißen die beiden Zahlen? Weise durch eine Probe nach, dass die angegebenen beiden Zahlen die gestellten Bedingungen erfüllen.

3) Die Eltern von Fritz haben eine fünfstellige symmetrische Telefonnummer, bei der die erste, dritte und fünfte Ziffer, aber auch die zweite und vierte Ziffer übereinstimmen. Die Quersumme dieser Telefonnummer ist so groß wie die aus den ersten beiden Ziffern gebildete Zahl.

Weise nach, dass sich die Telefonnummer aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt.
Gib diese Telefonnummer an.

4) Auf einer Versammlung waren dreimal so viele Männer wie Frauen anwesend. Nachdem vier Ehepaare die Versammlung vorzeitig verlassen mussten, waren viermal so viele Männer wie Frauen anwesend.

Wie viele Männer und wie viele Frauen besuchten diese Versammlung?
Führe eine Probe am Text durch.

5) Addiert man zum Kehrwert einer rationalen Zahl den Kehrwert der um die ganze Zahl a vermehrten Zahl, dann erhält man das Doppelte des Kehrwerts der um a verminderten Zahl.

Für welche Werte von a ist die Lösung eine ganze Zahl?
Für welche Werte von a gibt es mehr als eine Lösung?

6) Der ganzzahlige Nenner eines Bruches sei um 30 größer als sein ganzzahliger Zähler. Addiert man sowohl zum Zähler als auch zum Nenner jeweils die ganze Zahl a, dann erhält man den Kehrwert des Ausgangsbruches.

Für welche Werte von a gibt es keinen derartigen Bruch?
Wie lauten die zu $a = -32$ bzw. $a = 8$ gehörigen Brüche?

7) Ein Bus soll um 16.00 Uhr den Zielort seiner Fahrt erreichen. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h hätte er sein Ziel pünktlich erreicht. Aufgrund ungünstiger Verkehrsverhältnisse konnte er jedoch nur mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 km/h fahren und kam deshalb erst 16.10 Uhr am Zielort an.
Berechne die Länge des Weges, den der Bus bis zum Zielort zurückgelegt hat.
Berechne die Zeit, die der Bus für diesen Weg benötigte.

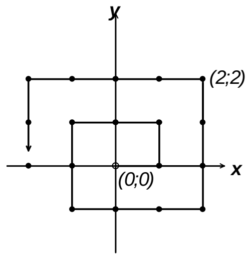
8) Für das Roden eines 32,5 ha großen Kartoffelschlages benötigt ein Kartoffelroder 14 Arbeitsstunden.
Wie lange dauert die Rodung, wenn gleichzeitig ein zweiter Kartoffelroder eingesetzt wird, dessen Leistung aber um 25% geringer ist als die des ersten?
Enthält diese Aufgabe eine überflüssige Angabe?

9) Martina hat eine Salzlösung L_1 bestehend aus 20 g Salz und 120 g Wasser und eine Salzlösung L_2, die aus 40 g Salz und 120 g Wasser besteht. Durch Mischen dieser beiden Lösungen möchte sie eine Lösung L_3 herstellen, die aus 25 g Salz und 120 g Wasser besteht.
Untersuche, ob es möglich ist, eine Lösung L_3 herzustellen.
Sollte das der Fall sein, dann gib an, wie viel Gramm der Lösung L_1 und der Lösung L_2 miteinander gemischt werden müssen.

10) Herr Schmitz berichtet von einem Geschäft, in dem er in genau 30 Minuten genau die Hälfte seines Geldes ausgegeben hat. Er hatte anfangs nicht mehr als 175 Euro bei sich. Verblüfft stellt er fest, dass er nach dem Geschäft die gleiche Anzahl an Cent besaß wie vorher an Euro und die halbe Anzahl an Euro wie vorher an Cent.
Wie viel Geld hat Herr Schmitz ausgegeben?
Weise nach, dass der ermittelte Betrag die gestellten Bedingungen erfüllt.

11) Ein Mathefloh hüpft auf der Zahlengeraden herum. Er springt von einer beliebigen rationalen Zahl a los, für die $a \neq 0$ und $a \neq 1$ gilt. Dabei darf er aber nur auf solchen rationalen Zahlen b landen, für die $b \neq 0$ und $b \neq 1$ gilt und welche die Sprungbedingung $a + \frac{1}{b} =$ erfüllen.
Weise nach: Der Floh kehrt stets nach gleich vielen Sprüngen erstmals zu seinem Ausgangspunkt zurück.
Nach wie vielen Sprüngen ist das der Fall?

12) Ein Roboter bewegt sich wie in der Abbildung angegeben spiralförmig in Schritten der Länge 1 auf den ganzzahligen Gitterpunkten um den Ursprung eines Koordinatensystems. Er beginnt im Punkt (0; 0). Die fünf ersten Schritte bringen ihn der Reihe nach zu den Punkten (1; 0), (1; 1), (0; 1), (-1; 1) und (-1; 0).
Auf welchem Punkt landet der Roboter beim 2009. Schritt?



Zahlentheorie

1) Man denke sich das Produkt p aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind.
Beantworte, ohne dieses Produkt vollständig auszurechnen oder einen Taschenrechner zu verwenden, folgende Fragen:

a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produktes?

b) Ist das Produkt eine 18-stellige Zahl?

[Eigne dir im Beiblatt zum KZM8 die Potenzgesetze an.]

2) Ermittle alle Paare (x; y) positiver ganzer Zahlen, welche die Gleichung $3x + 4y = 63$ erfüllen.

[Wiederhole im Arbeitsmaterial des KZM7 den Abschnitt 1.5. „Das Lösen von Bestimmungsaufgaben".]

3) Zu einer natürlichen Zahl n betrachten wir ihre Spiegelzahl $\overline{n}$ und das Produkt p(n) ihrer Ziffern. Die Spiegelzahl $\overline{n}$ hat die gleichen Ziffern wie n, aber in umgekehrter Reihenfolge.
Die Zahl n soll folgende Bedingungen erfüllen:

(a) Alle Ziffern sind von 0 verschieden.

(b) $n \cdot \overline{n} = 1000 + p(n)$.

Ermittle alle Zahlen, die beide Bedingungen erfüllen.

4) Ermittle alle Tripel (x; y; z) natürlicher Zahlen, welche die Gleichung

$$x + y + z + 2 = xyz$$

erfüllen.

5) Von einer sechsstelligen natürlichen Zahl z wird gefordert:
Streicht man die erste Ziffer und hängt sie an die verbleibenden fünf Ziffern an, dann erhält man eine Zahl, die dreimal so groß ist wie z.

Ermittle alle Zahlen z, die diese Bedingungen erfüllen.

6) Ermittle alle Tripel (x; y; z) ganzer Zahlen, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

(a) Die Summe der drei Zahlen dieses Tripels beträgt 6.

(b) Der Quotient aus dem Produkt der beiden ersten Zahlen und der dritten Zahl beträgt 6.

(c) Die Differenz aus dem Quadrat der ersten Zahl und der Summe aus den beiden anderen Zahlen beträgt ebenfalls 6.

7) Setzt man zwischen die zweite und dritte Ziffer einer vierstelligen Zahl das Multiplikationszeichen, dann erhält man ein Produkt aus zwei zweistelligen Faktoren.

Ermittle alle vierstelligen Zahlen, die doppelt so groß sind wie das auf obige Weise gebildete Produkt.

8) Das Quadrat der dreistelligen natürlichen Zahl 175 kann man folgendermaßen bilden:
Man streicht die Ziffer 5. Es bleibt die Zahl 17 übrig. Diese Zahl multipliziert man mit ihrem Nachfolger 18 und erhält das Produkt 306. Man hängt die Zahl 25 an und erhält die Zahl 30625.
Die Probe $175^2 = 30625$ bestätigt dieses Ergebnis.

a) Beweise, dass dieses Verfahren für jede dreistellige Zahl mit der Endziffer 5 zum richtigen Ergebnis führt.
b) Untersuche, ob dieses Verfahren für jede beliebige Zahl mit der Endziffer 5 zum richtigen Ergebnis führt.

9) a) Ermittle den Wert der Summe s_1 aller einstelligen Zahlen und den Wert der Summe s_2 aller zweistelligen Zahlen, die keine Null als Ziffer haben.

b) Ermittle den Wert der Summe s_3 aller dreistelligen Zahlen, die keine Null als Ziffer haben.

c) Leite aus den Werten von s_2 und s_3 Vermutungen für die Werte von s_4, s_5 und s_6 ab. Stelle diese Werte so in Form von Produkten dar, dass zu erkennen ist, wie diese Vermutungen für die Werte von s_4, s_5 und s_6 aus den Werten für s_1, s_2 und s_3 abgeleitet wurden.

Kombinatorik / Logik

1) Auf einem Tisch stehen in dieser Reihenfolge von links nach rechts eine rote, eine grüne, eine blaue, eine weiße und eine schwarze Kanne. In diesen Kannen befinden sich in unbekannter Reihenfolge die fünf verschiedenen Getränke Tee, Kaffee, Milch, Wasser und Saft. Bekannt ist nur, dass sich die Kanne mit Kaffee in der Mitte befindet.
Die schwarze Kanne wird nun so zwischen zwei andere Kannen gestellt, dass unmittelbar links neben ihr die Kanne mit dem Tee und unmittelbar rechts neben ihr die Kanne mit der Milch stand. Nach diesem Umstellen steht die Kanne mit der Milch neben der Kanne mit dem Wasser.
Beweise, dass man aus diesen Angaben eindeutig ermitteln kann, welche Getränke die genannten Kannen enthalten.

2) In einem Laufwettbewerb, bei dem drei Medaillen (Gold, Silber, Bronze) vergeben werden, haben sich sechs Läuferinnen für den Endlauf qualifiziert.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten des Einlaufs gibt es? Oder anders gefragt: Auf wie viele verschiedene Arten können die sechs Läuferinnen die Plätze 1 bis 6 belegen?

b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Vergabe von Gold-, Silber- und Bronzemedaille gibt es? Oder anders gefragt: Auf wie viele verschiedene Arten können die Plätze 1 bis 3 durch drei der sechs Läuferinnen belegt werden?

c) Wie viele verschiedene Möglichkeiten von Medaillenträgern gibt es überhaupt?
Oder anders gefragt: Auf wie viele verschiedene Arten können drei der sechs Läuferinnen irgendeine Medaille erhalten, also ohne Berücksichtigung von Gold, Silber oder Bronze?

[Arbeite das Beiblatt „Kombinatorik“ des Arbeitsmaterials zu KZM8 durch.]

3) Es sind 9 Punkte einer Ebene gegeben, von denen niemals 3 Punkte auf ein und derselben Geraden liegen.

Wie viele Geraden gibt es, die 2 der 9 Punkte enthalten?

4) Ein König beschließt in seinem Reich eine Gebietsreform. Dabei soll jede neu zu bildende Provinz eine Fahne erhalten. Zur Verfügung stehen die heraldischen Farben Rot, Blau, Schwarz, Grün, Gold, Silber und Purpur.
In wie viele Provinzen kann das Land höchstens eingeteilt werden, wenn die Fahne eine Trikolore mit drei verschiedenen Farben sein soll und

a) keine weitere Bedingung gestellt wird,

b) der oberste Streifen der Trikolore golden sein muss,

c) einer der drei Streifen der Trikolore golden sein muss?

5) Eine Reihe mit neun Sitzplätzen wird von sechs Studenten und den Professoren Alpha, Beta und Gamma belegt. Die drei Professoren kommen vor den sechs Studenten an und wählen ihre Plätze so, dass jeder Professor zwischen zwei Studenten sitzt.

Wie viele Möglichkeiten gibt es für die drei Professoren, ihre Plätze zu wählen?

6) Ermittle die Anzahl aller Dreiecke, deren sämtliche Eckpunkte auch Eckpunkte

a) eines konvexen Siebenecks,

b) eines konvexen Hundertecks

sind.

7) Ermittle die Anzahl aller siebenstelligen Zahlen, die die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) Die gesuchten Zahlen sind durch 15 teilbar.

(b) Jede der gesuchten Zahlen wird mit sieben aufeinander folgenden Ziffern aus der Folge 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 geschrieben, wobei diese dann in beliebiger Reihenfolge verwendet werden können.

8) Anna möchte auf ihrer Geburtstagsparty eine Musik-CD verlosen. Jasmin und Jonas nehmen an einem „Gewinnspiel“ teil, das sich Anna dazu ausgedacht hat. Sie erklärt ihnen die Spielregel:
„Dieser Topf enthält blaue und gelbe Gummibärchen. Daneben liegt eine Tüte mit nur gelben Bärchen in genügender Anzahl. Ich entnehme zunächst zwei Bärchen aus dem Topf. Ist das Paar gleichfarbig, wird ein Bärchen aus der Tüte in den Topf gelegt. Haben aber die entnommenen Bärchen unterschiedliche Farbe, lege ich nur das blaue Bärchen in den Topf zurück. Das wiederhole ich so lange, bis ich das letzte Bärchenpaar aus dem Topf genommen habe und schließlich nur noch ein einziges Bärchen im Topf liegt. Ist dieses Bärchen blau, gewinnt Jonas, ist es aber gelb, gewinnt Jasmin.“

Untersuche, in welcher Weise die Gewinnchancen von Jasmin und von Jonas von der Anzahl der gelben und von der Anzahl der blauen Bärchen abhängig sind.

Geometrie

1) Es sei ABCD ein Parallelogramm; der Innenwinkel BAD habe die Größe 60°. Der Kreis um A mit dem Radius $\overline{AD}$ schneide die Gerade CD außer in D auch im Punkt E. Der Kreis um C mit dem Radius $\overline{CD}$ schneide die Gerade AD außer in D auch noch in F.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt, dass das Dreieck BFE gleichseitig ist.
Stelle den Beweis in Form eines Beweisschemas dar.

[Wiederhole im Arbeitsmaterial des KZM7 den Abschnitt 1.4. „Das Beweisen von Sätzen“.]

2) Von einem Dreieck ABC, dessen Innenwinkelgrößen wie üblich mit α, β und γ bezeichnet sind, ist bekannt:
Die im Mittelpunkt D der Seite $\overline{AB}$ errichtete Senkrechte schneidet die Halbierende des Winkels BAC in einem Punkt E und die Seite $\overline{AC}$ in einem inneren Punkt F. Der Winkel FEA ist doppelt so groß wie der Innenwinkel CBA.

a) Ermittle β und γ in Abhängigkeit von α.

b) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\beta < 60°$ gilt.

c) Für welche Innenwinkelgröße γ gilt $\beta = 55°$?

d) Untersuche, ob es eine Winkelgröße β gibt, für die das Dreieck ABC rechtwinklig ist. Sollte das der Fall sein, dann ermittle β sowie die zugehörigen Winkelgrößen α und γ.

[Stelle die Voraussetzungen unter Verwendung günstiger Bezeichnungen in Kurzform so dar, wie dies in der Lösung von G1) gezeigt wird.]

3) Ein Viereck ABCD erfülle folgende Voraussetzungen:

V_1: ABCD ist ein Drachenviereck mit der Symmetrieachse AC.
V_2: Es gilt $|AB| = a$, $|BC| = b$ und $a < b$.
V_3 Es gilt $|\sphericalangle CBA| = 90°$.
V_4: Der Flächeninhalt F(ABCD) des Drachenvierecks ABCD beträgt 338 cm².

a) Berechne die Seitenlängen a und b für den Fall, dass a doppelt so groß wie b ist.

b) Beweise: Das Drachenviereck hat einen Umkreis.

c) Beweise: Fällt der Inkreismittelpunkt M_i des Drachenvierecks mit seinem Umkreismittelpunkt M zusammen, dann ist dieses Drachenviereck ein Quadrat.

[Arbeite in „Einige grundlegende planimetrische Sätze“ den Abschnitt „VIb. Kreis und Winkel“ durch.]

4) Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck und k sein Umkreis mit dem Mittelpunkt M. Die Verlängerungen der Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ und $\overline{CM}$ über M hinaus schneiden k in dieser Reihenfolge in den Punkten D, E und F.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Dreiecke BMA und MEA den gleichen Flächeninhalt haben.

b) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte von Sechseck AFBDCE und Dreieck ABC.

c) Untersuche, ob sich der in Teil a) bewiesene Satz verallgemeinern lässt.

[Lies im Arbeitsmaterial des KZM7 den Abschnitt „1.2.3. Verallgemeinern und Spezialisieren von Sätzen“.]

5) Die Länge a und die Breite b eines Rechtecks, bei dem die Maßzahlen von Umfang und Flächeninhalt übereinstimmen, sollen beide um 2 Längeneinheiten verkürzt werden.

a) Beweise folgende Aussage: Alle derart entstandenen Rechtecke haben die gleiche Maßzahl des Flächeninhalts.

b) Ermittle die Maßzahlen des Umfangs eines solchen Rechtecks in Abhängigkeit von a.

6) In einem rechtwinkligen Dreieck ABC sei B der Scheitel des rechten Winkels und für die Kathetenlängen gelte $|BC| < |AB|$. Der Kreis k um B mit dem Radius der Länge |BC| schneide die Hypotenuse außer in C auch noch in D. Die in E an k gelegte Tangente t schneide die Kathete $\overline{AB}$ in E.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$ gleich lang sind.
Untersuche, ob eine der Voraussetzungen aus den restlichen Voraussetzungen folgt (und daher „überflüssig“ ist).

[Lies im Begleitmaterial „Beweismittel zum Beweis planimetrischer Sätze“ zum KZM7 den Abschnitt „2. Beziehungen zwischen Strecken“ und entscheide, welches der für „a = b“ angegebenen Hilfsmittel vermutlich am besten geeignet ist, die Behauptung herzuleiten.]

7) Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD. Auf der Seite $\overline{CD}$ liegt zwischen C und D ein Punkt E. Die Parallele zur Diagonalen $\overline{BD}$ durch E schneidet die Seite $\overline{BC}$ in einem Punkt F. Die Parallele zur Seite $\overline{AB}$ durch F schneidet die Seite $\overline{AD}$ in einem Punkt G. Die Parallele zur Diagonalen BD durch G schneidet die Seite AB in H. Die Strecke $\overline{FG}$ schneidet die Diagonale $\overline{BD}$ im Punkt P.

Beweise: Die Vierecke PFED und PGHB haben denselben Flächeninhalt.

[Lies im Begleitmaterial „Beweismittel ...“ zum KZM7 im Abschnitt 1. die unter $(\alpha + \beta)$ angegebenen Hilfsmittel.]

8) Es seien ABCD ein Quadrat, k_1 der Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$, dessen Punkte sämtlich im Inneren von ABCD liegen, und k_2 der Viertelkreisbogen um B mit dem Radius $\overline{AB}$, dessen Punkte ebenfalls sämtlich im Inneren von ABCD liegen. Außerdem schneide ein vom Punkt ausgehender Strahl den Halbkreis k_1 in E, den Kreisbogen k_2 in F und die Strecke $\overline{AD}$ in G.

a) Torsten behauptet, dass die Winkel EAF und FAD die gleiche Größe haben.
Beweise oder widerlege Torstens Behauptung.

b) Ermittle die Größe φ des Winkels AFB in Abhängigkeit von der Größe α_1 des Winkels BAE.