Aufgaben zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Klasse 8 - Teil 2

Zahlentheorie

10) Berechne m. H. des Euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen 242451 und 51429. Ermittle die Primfaktorzerlegung dieses ggT und hieraus die Primfaktorzerlegungen der beiden Zahlen.

[Arbeite den Abschnitt „3.1. Euklidischer Algorithmus" des MatKZM7 durch.]

11) Entscheide, ob folgende Kongruenzaussagen $a \equiv b\ (m)$ wahr oder falsch sind. Ermittle jeweils den kleinsten positiven Rest, den a bzw. b bei Division durch m lassen. Begründe!

a) $29 \equiv 15\ (7)$, b) $119 \equiv -61\ (9)$, c) $539 \equiv 408\ (6)$, (d) $356 \equiv -139\ (15)$.

[Arbeite die Abschnitte „3.1. Grundgleichung der Zahlentheorie" und „3.3. Das Rechnen mit Kongruenzen (Modulrechnung)" des MatKZM7 durch.]

12) Vereinfache (durch entsprechende Division auf beiden Seiten) folgende wahre Aussagen:

a) $64 \equiv 40\ (12)$, b) $-45 \equiv 60\ (7)$, c) $196 \equiv 376\ (18)$, d) $306 \equiv 663\ (357)$.

13) Gegeben seien zwei natürliche Zahlen a und b, die bei Division durch 7 die Reste 5 bzw. 3 lassen.
Welchen Rest lässt die Summe der Quadrate dieser Zahlen bei Division durch 7?

[Verwende das Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel. Stelle die Lösung in Form eines Lösungsschemas dar.]

14) Beweise, dass für alle ganzen Zahlen gilt:
Wenn $a \equiv b\ (m)$ und $b \equiv c\ (m)$, dann $a \equiv c\ (m)$.

[Arbeite den Abschnitt „3.3. Das Rechnen mit Kongruenzen (Modulrechnung)" des MatKZM7 durch. Stelle den Beweis in Form eines Beweisschemas so dar, wie es im Abschnitt „1.4 Das Beweisen von Sätzen" des MatKZM7 gezeigt wird, und mache dich an dieser Stelle auch mit dem Begriff „Lösungsgraph" vertraut.]

15)

a) Beschreibe ein Verfahren, wie man für eine beliebige natürliche Zahl n den kleinsten positiven Rest berechnen kann, den n^3 bei Division durch 7 lässt.
Berechne diesen Rest für $n = 98765$.

b) Löse die in Teil a) gestellte Aufgabe für 3^n mit $n = 98765$ bei Division durch 5.

c) Berechne den kleinsten positiven Rest, den 2670^{527} bei Division durch 7 lässt.

16) Beweise folgende Sätze:

a) Wenn $z = 43^7 - 87^{13}$, dann $44|z$.

b) Wenn $z = 154^{2n} + 98^{2n+1}$, dann $63|z$.

[Verwende das Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel.]

17) Betrachtet wird folgende Regel:
Es seien p und q ganze Zahlen. Dann ist $1000p + q$ genau dann durch 7 teilbar, wenn $p - q$ durch 7 teilbar ist.

a) Entscheide durch Anwendung dieser Regel, ob die Zahl 520833 durch 7 teilbar ist.

b) Entscheide durch dreimaliges Anwenden dieser Regel, ob 9012345678 durch 7 teilbar ist.

c) Beweise diese Regel.

Hinweis:
Diese Regel kann zur effektiv Teilbarkeitsuntersuchung angewendet werden, weil in jedem Anwendungsschritt die Stellenzahl der noch zu untersuchenden Zahl verringert wird.

18) Untersuche, ob es 2014 aufeinanderfolgende, positive ganze Zahlen derart gibt, dass ihre Summe eine Quadratzahl ist.

Hinweis: Es gilt $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

K o m b i n a t o r i k

9) Ermittle die Anzahl und die Summe aller siebenstelligen Zahlen, für die das Produkt ihrer Ziffern gleich 45^3 ist und deren Quersumme keine Primzahl ist.

10) Die Vokantianer benutzen wie wir in ihrer Schriftsprache ein Alphabet aus Konsonanten- und Vokalbuchstaben. In der Vokant-Schriftsprache gibt es keine Wörter, bei denen zwei Vokalbuchstaben bzw. zwei Konsonantenbuchstaben unmittelbar aufeinanderfolgen. Die Wörter können mit Vokal- oder Konsonantenbuchstaben beginnen. Jede endliche Folge von einander so abwechselnden Vokal- oder Konsonantenbuchstaben ergibt tatsächlich auch ein Wort in der Vokant-Schriftsprache. Ein Vokantianer behauptet, dass die Vokant-Schriftsprache genau 4800 fünfbuchstabige Wörter hat.
Untersuche, ob die Vokant-Schriftsprache tatsächlich genau 4800 fünfbuchstabige Wörter haben kann.

11) Eine Palindromzahl ist eine Zahl mit folgender Eigenschaft: Liest man ihre Ziffern von links nach rechts, dann ergibt sich dieselbe Zahl wie beim Lesen von rechts nach links. Die Zahl 615516 ist eine Palindromzahl. Die Zahl 415 ist keine Palindromzahl, denn wenn man die Ziffern von rechts nach links liest, erhält man die Zahl 514.

a) Beweise: Eine sechsstellige Palindromzahl ist immer durch 11 teilbar.

b) Beweise: Wenn man alle sechsstelligen Palindromzahlen durch 11 dividiert, dann sind mindestens 10% dieser Palindromzahlen fünfstellige Palindromzahlen.

c) Untersuche: Gibt es mehr sechsstellige Palindromzahlen, die bei Division durch 11 keine fünfstellige Palindromzahl ergeben, als solche, bei denen sich eine fünfstellige Palindromzahl ergibt?

G e o m e t r i e

9) Ein konvexes Viereck ABCD, dessen Eckpunkte in dieser Reihenfolge wie üblich entgegen dem Uhrzeigersinn bezeichnet sind, und ein Punkt E erfüllen folgende Bedingungen:

- (a) Der Winkel ACB ist ein rechter Winkel.
- (b) Die Größe des Winkels BAC beträgt 20°.
- (c) Der Punkt D liegt auf derselben Seite der Geraden AB wie der Punkt C und der Winkel ADC ist ein rechter Winkel.
- (d) Die Größe des Winkels CAD beträgt 40°.
- (e) Der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$ schneidet die Strecke $\overline{CD}$ in einem von C verschiedenen Punkt E.

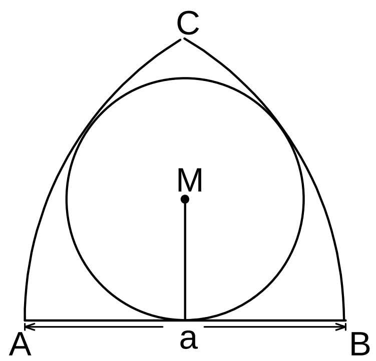
Ermittle das Verhältnis der Längen der Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{CE}$.

[Stelle die Lösung in Form eines dreispaltigen Schemas so dar, wie dies in den Lösungen der Sachaufgabe 1) sowie den Geometrie-Aufgaben 1) und 8) vorgeführt wird.]

10) Eine dreieckige Fläche wird (wie in nebenstehender Figur angegeben) von einer Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge a sowie von zwei Kreisbögen begrenzt, die zu den Kreisen k(A; a) bzw. k(B; a) gehören.

Dieser dreieckigen Figur sei ein Kreis mit dem Radius r einbeschrieben, der alle drei Begrenzungslinien berührt.

Drücke r durch a aus.



11) Es seien ABC ein spitzwinkliges Dreieck und H der Schnittpunkt seiner Höhen. Der Punkt H werde an der Geraden AB gespiegelt, der Bildpunkt werde mit H‘ bezeichnet.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen das Viereck AH‘BC ein Sehnenviereck ist.
Vermute auf der Grundlage genau gezeichneter Figuren, ob dieser Satz auch für rechtwinklige oder stumpfwinklige Dreiecke gilt.

12) Von einem Punkt M im Inneren eines gegebenen spitzen Winkels XAY fällt man auf die durch die Schenkel dieses Winkels festgelegten Geraden AX bzw. AY die Lote $\overline{MP}$ bzw. $\overline{MQ}$, wobei $P \neq A$ und $Q \neq A$ gelte. Vom Punkt A fällt man das Lot $\overline{AK}$ auf die Gerade PQ.

Beweise, dass dann stets $|\sphericalangle PAK| = |\sphericalangle MAQ|$ gilt.

[Wiederhole in „Sätze" auf S.7 den Abschnitt VIb. (Kreis und Winkel) und den Abschnitt VIc. (Kreis und Viereck).]

13) Drei kongruente Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 und dem Radius r verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt D. Diese Kreise schneiden einander außerdem in weiteren Punkten, die mit A, B und C bezeichnet werden.

a) Beweise, dass man einen Punkt S konstruieren kann, der von diesen drei Schnittpunkten den gleichen Abstand hat.

b) Vergleiche den Radius des Kreises mit dem Mittelpunkt S, auf dem A, B und C liegen, mit dem Radius r. Beweise deine Vermutung.

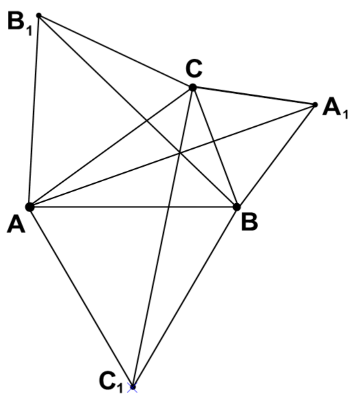
14) Gegeben ist ein spitzwinkliges Dreieck ABC mit seinem Umkreis. Der Umkreismittelpunkt heißt M, der Höhenschnittpunkt heißt H und M_c ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Die Gerade MC schneidet den Umkreis außer im Punkt C noch im Punkt P.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt:

(1) Die Geraden AH und PB sind parallel.

(2) Die Punkte P, M_c und H liegen auf einer Geraden.

Untersuche, ob dieser Satz auch für rechtwinklige oder stumpfwinklige Dreiecke gilt.
[Arbeite im Abschnitt „1.2. Logische Verwandtschaften zwischen Aussagen“ vor allem den Abschnitt „1.2.3. Verallgemeinern und Spezialisieren von Sätzen“ des MatKZM durch.]

15) Über den Seiten eines Dreiecks ABC werden nach außen - wie in der nebenstehenden Abbildung zu sehen - gleichseitige Dreiecke errichtet. Die Punkte A_1, B_1 und C_1 sind die Spitzen der neuen Dreiecke.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Strecken $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{CC_1}$ gleich lang sind.



16) In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sind M_c, M_a und M_b die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ bzw. $\overline{AC}$. Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ sind nach außen Quadrate gezeichnet. Die Schnittpunkte ihrer Diagonalen heißen D_1 und D_2.
Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt:

(B_1) Das Viereck $M_cM_aCM_b$ ist ein Parallelogramm.

(B_2) Das Dreieck $D_1D_2M_c$ ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck.

Untersuche, ob dieser Satz auch für rechtwinklige oder für stumpfwinklige Dreiecke gilt.

17) Über den vier Seiten eines nicht rechtwinkligen Parallelogramms werden Quadrate konstruiert.
Beweise, dass die Diagonalenschnittpunkte dieser vier Quadrate Eckpunkte eines Quadrates sind.
Warum ist die Voraussetzung „nicht rechtwinklig“ keine notwendige Einschränkung?

18) Über sechs Punkte A, B, C, D, E und M wird vorausgesetzt:

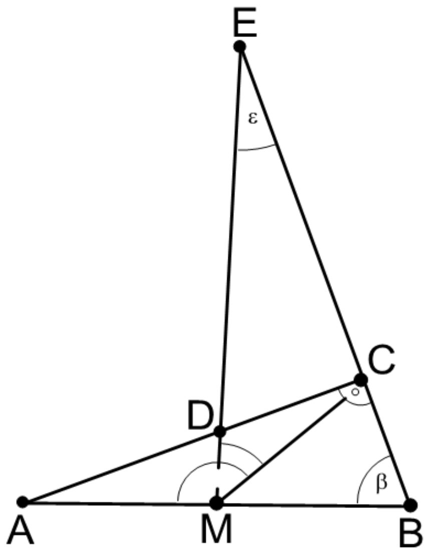
V_1: A, B und C bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in C.

V_2: M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.

V_3: D liegt auf der Seite $\overline{AC}$ und $\overline{DC}$ ist kürzer als $\overline{AD}$.

V_4: E ist der Schnittpunkt der Geraden $\overline{BC}$ und $\overline{MD}$.

V_5: Die Strecken $\overline{ED}$ und $\overline{AB}$ sind gleich lang.



Die Größe des Winkels CBA ist mit β, die des Winkels DEC mit ε bezeichnet.

a) Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen $\beta = 3 \cdot \varepsilon$ folgt.

b) Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt:
Der Winkels CMA ist dreimal so groß wie der Winkel CME.

19) Gegeben ist ein regelmäßiges Fünfeck ABCDE. Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{EB}$ ist mit F bezeichnet. Der Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius $\overline{AB}$ schneidet die Gerade AE außer in A noch im Punkt G. Der Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $\overline{AB}$ schneidet die Gerade CB außer in B noch im Punkt H.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen auch das Fünfeck AGHBF regelmäßig ist.
[Erarbeite im Begleitmaterial „Einige grundlegende planimetrische Sätze“ zum KZM7 den Abschnitt „VII. Ähnlichkeitsabbildungen - Ähnlichkeit - Strahlensätze“.]

20) Zu konstruieren sind alle (bis auf Kongruenz verschiedene) Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) Die Seite $\overline{AC}$ hat eine Länge von 4 cm.
(b) Die Seite $\overline{AB}$ hat eine Länge von 6 cm.
(c) Die Strecke $\overline{BH}$ hat eine Länge von 5 cm.
(d) Die Strecke $\overline{BH}$ ist eine Höhe im Dreieck ABC.

a) Beschreibe deine Konstruktion und führe die beschriebene Konstruktion durch.
b) Beweise folgenden Satz: Wenn ein Dreieck die gestellten Bedingungen erfüllt, dann lässt es sich wie beschrieben konstruieren (Einzigkeitsnachweis).
c) Beweise folgenden Satz: Wenn ein Dreieck wie beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Bedingungen (Existenznachweis).

Hinweis:
Bei den Konstruktionsaufgaben 21), 23) und 24) stimmen die ersten beiden Zeilen der Aufgabenstellung sowie die Teilaufgaben a) bis c) mit denen der Aufgabe 20) wortwörtlich überein. Daher werden bei diesen Aufgaben nur die unterschiedlichen gegebenen Bedingungen (a), (b), ... angegeben. Bei 22) nur Teil a) und b) lösen.

21) (a) Die Seite $\overline{BC}$ hat eine Länge von 5 cm.
(b) Die Summe der Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ beträgt 11 cm.
(c) Die Größe des Winkels CBA beträgt 70°.

22) (a) Die Summe der Längen der drei Seiten beträgt 12 cm.
(b) Der Winkel BAC hat die Größe 60°.
(c) Die Strecke $\overline{CH}$ ist 4 cm lang.
(d) Die Strecke $\overline{CH}$ ist eine Höhe im Dreieck ABC.

23) (a) ABCD ist ein Sehnenviereck.
(b) Die Strecke $\overline{AB}$ hat eine Länge von 5 cm.
(c) Der Winkel BAD ist 120° groß.
(d) Der Winkel CBA ist 100° groß.
(e) Die Summe der Längen der Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$ beträgt 12 cm.

24) (a) Die Seite $\overline{AC}$ hat die Länge b.
(b) Die Seite $\overline{AB}$ hat die Länge c.
(c) Der Winkel ACB ist dreimal so groß wie der Winkel CBA.

Regeln zum Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben mit Hilfe der Methode der geometrischen Örter und der Methode der Hilfselemente

- Formuliere die Aufgabe so um, dass nur Punkte (und Bedingungen) gegeben und nur Punkte gesucht sind. Als gegebene Punkte eignen sich die Endpunkte einer Strecke, deren Länge bekannt ist.
  - ° Welches sind die beiden (grün zu kennzeichnenden) gegebenen Punkte, welches sind die (rot zu kennzeichnenden) gesuchten Punkte?
    Welche der gegebenen Bedingungen liefert die gegebenen Punkte?
- Ermittle zu jedem gesuchten Punkt (möglichst) zwei geometrische Örter.
  - ° Welche der gegebenen Bedingungen liefert einen solchen geometrischen Ort?
  - ° Welche Bedingung wurde noch nicht verwendet? Sie könnte den gesuchten zweiten geometrischen Ort liefern.

Wenn du auf diese Weise nicht sofort ans Ziel gelangst, dann suche nach (konstruierbaren bzw. hinreichenden, blau zu kennzeichnenden) Hilfspunkten.

- VA: Welche Hilfspunkte lassen sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar konstruieren? Welches sind die benötigten beiden geometrischen Örter?
- RA: Aus welchen Hilfspunkten ließe sich der gesuchte Punkt unmittelbar konstruieren?
- Wenn eine Summe s oder eine Differenz d von zwei Streckenlängen gegeben ist, dann erzeuge durch Streckenabtragung einen Hilfspunkt, der Endpunkt einer Strecke ist, deren Länge gleich s bzw. d ist. (Dies ist ein „naheliegender“ Hilfspunkt.)
- Wähle Hilfspunkte stets so, dass eine Figur entsteht, über die „viel bekannt“ ist (gleichseitiges, gleichschenkliges oder rechtwinkliges Dreieck; Parallelogramm, Sehnenviereck, Tangentenviereck u.ä.).
- Welche („gestrichelt“ zu zeichnenden) Hilfslinien könnten nützlich sein, um eine derartige nützliche Hilfsfigur zu erzeugen?
- Welche Hilfsmittel (Sätze, Formeln, Definitionen u. ä.) könnten helfen, aus den gegebenen Größen (Streckenlängen, Winkelgrößen) oder aus den gegebenen Bedingungen weitere Größen oder Bedingungen abzuleiten, die bei der Suche nach geometrischen Örter helfen können?

Ein Lösungsplan ist gefunden, wenn man von den gegebenen Punkten über die gefundenen Hilfspunkte zu den gesuchten Punkten gelangen kann, wobei zu jedem konstruierten Punkt zwei geometrische Örter bekannt sind.

- Gib zu jedem Hilfspunkt durch eine Zusatzvoraussetzung an, wie er konstruiert werden soll.
- Nummeriere die Konstruktionsschritte durch und untersuche, ob bzw. unter welchen Bedingungen das erhaltene geometrische Objekt (bis auf Kongruenz) eindeutig konstruierbar ist.