# Aufgaben zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Klasse 7 - Teil 2

## Z a h l e n t h e o r i e

[Wiederhole aus den „Aufgaben zur Vorbereitung auf die Landesrunde der MO für Klasse 7 - Teil 1“ auf S. 12 und S. 13 „Einige mathematische und logische Grundlagen“.
Lies in MatKZM7 die Abschnitte „3.1. Grundgleichung der Zahlentheorie; Euklidischer Algorithmus“ und „3.2. Teilbarkeitslehre“.
Lies auf S. 6 „Das Beweisen von mathematischen Sätzen“.
Stelle die Lösung der Aufgaben Z17) bis Z21) in Form eines Beweisschemas dar.]

13)

a) Gegeben sei die Zahl 523.
Bilde aus den 3 Ziffern dieser Zahl alle zweistelligen Zahlen so, dass jede dieser zweistelligen Zahlen jede der 3 Ziffern höchstens einmal enthält.
Berechne die Summe s dieser zweistelligen Zahlen.

b) Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

(a) Die Summe aller derjenigen zweistelligen Zahlen, die sich wie im Aufgabenteil a) aus den Ziffern von z bilden lassen, beträgt z.
(b) Die Ziffern von z sind ungleich Null.
(c) Die drei Ziffern von z sind untereinander verschieden.

c) Untersuche, ob die im Aufgabenteil b) gestellte Aufgabe weitere Lösungen hat, wenn man die Bedingung (c) weglässt.

14) Ermittle die Anzahl aller geordneten Zahlentripel (x; y; z) positiver ganzer Zahlen, welche die Gleichung $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1$ erfüllen.

15) Ermittle alle natürlichen Zahlen x, die folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllen:

(a) $0 < x < 10000$;
(b) x ist ein Vielfaches von ggT(2737; 8568);
(c) $8|(x - 5)$;
(d) 3 und 5 sind keine Teiler von x.

[Stelle die Lösung in Form eines Lösungsschemas dar.]

16)
a) Gegeben seien zwei natürliche Zahlen a und b. Bei Division durch 7 lässt a den Rest 5 und b lässt den Rest 3. Welchen Rest lässt dann die Summe der Quadrate dieser Zahlen bei Division durch 7?

b) Gegeben seien zwei natürliche Zahlen a und b. Bei Division durch 24 lässt a den Rest 7 und b lässt den Rest 5.
Ermittle die Menge aller Teiler der Differenz der Quadrate dieser beiden Zahlen.

[Lies im Arbeitsmaterial des KZM7 den Abschnitt 3.3. (Das Rechnen mit Kongruenzen).]

17) Beweise oder widerlege folgende Aussagen über natürliche Zahlen. Verwende beim Beweisen das Übersetzen in die Sprache der Gleichungen.

a) Wenn $a|b$ und $a|c$, dann $b|c$.

b) Wenn $a|b$ und $a|c$, dann $a^2|bc$.

c) Wenn $a|c$ und $b|c$, dann $ab|c$.

18)
a) Was lässt sich über das Produkt von vier beliebigen natürlichen Zahlen aussagen, wenn die Summe aus diesen Zahlen eine ungerade Zahl ist?
Finde eine Vermutung und beweise diese Vermutung.

b) Suche nach einer wahren Verallgemeinerung des gefundenen Satzes, indem du die Voraussetzung, dass es sich um vier natürliche Zahlen handelt, geeignet abschwächst.

[Lies im Arbeitsmaterial des KZM7 den Abschnitt 1.2.3. (Verallgemeinern und Spezialisieren von Sätzen).]

19) Seien p und $(2p + 1)$ Primzahlen und es gelte $p \neq 3$.
Es ist zu beweisen, dass dann stets $(4p + 1)$ keine Primzahl ist.
Leite aus diesen Voraussetzungen noch eine andere Behauptung ab.

[Verwende das Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel.]

20) Sei n eine beliebige natürliche Zahl und es gelte $z = 46^{2n} - 12^{2n}$.
Beweise, dass dann stets $1972|z$ gilt.

[Verwende das Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel.]

21) Seien a und b natürliche Zahlen. Beweise folgenden Satz:
Wenn a bei Division durch 24 den Rest 7 lässt und b bei Division durch 24 den Rest 5, dann ist die Differenz der Quadrate dieser beiden Zahlen stets durch 24 teilbar.

[Verwende das Rechnen mit Kongruenzen als Hilfsmittel.]

## G e o m e t r i e

[Lies im Arbeitsmaterial des KZM7 den Abschnitt 1.4. (Das Beweisen von Sätzen). Wiederhole in „Einige grundlegende planimetrische Sätze“ die Abschnitte II. (Winkel), V. (Vierecke) und in IV. (Dreiecke) die Abschnitte IVa., IVb. und IVc. Lies dir die „Beweismittel zum Beweis planimetrischer Sätze“ durch.]

7) Ein Viereck ABCD erfülle folgende Voraussetzungen:

$V_1$: ABCD ist ein Quadrat;

$V_2$: M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{BC}$;
N ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen die Behauptung $\sphericalangle NMA = \sphericalangle ANM$ folgt.

8) Ein Dreieck ABC erfülle folgende Voraussetzungen:

$V_1$: K ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks ABC.

$V_2$: M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ABC.

$V_3$: Der Punkt D liegt so, dass der Mittelpunkt S der Strecke $\overline{CD}$ auf der Seite $\overline{AB}$ liegt.

$V_4$: N ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BD}$.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Strecken $\overline{MN}$ und $\overline{KS}$ stets einander halbieren.

9) Ein Dreieck ABC erfülle folgende Voraussetzungen:

$V_1$: Die Seitenhalbierenden $\overline{CS_c}$ und $\overline{AS_a}$ des Dreiecks ABC schneiden einander im Punkt S.

$V_2$: X ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AS}$.

$V_3$: Y liegt auf dem Strahl $\overrightarrow{CS_c}$ außerhalb des Dreiecks ABC so, dass
$\overline{CS_c} = 3 \cdot \overline{YS_c}$ gilt.

Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt, dass das Viereck $XYS_aC$ stets ein Parallelogramm ist.

10) Beweise folgenden Satz:

Halbiert man die der Seite $\overline{BC}$ anliegenden Außenwinkel eines Dreiecks ABC und fällt vom Schnittpunkt M dieser Halbierenden auf die Seiten dieses Dreiecks oder auf deren Verlängerungen die Lote $\overline{MD}$, $\overline{ME}$ und $\overline{MF}$, dann gilt $\overline{MD} = \overline{ME} = \overline{MF}$.

11) In einem gleichschenkligen Dreieck ABC (mit der Basis $\overline{AB}$) habe der Winkel ACB ein Gradmaß von 120°.

Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{BC}$ und die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AC}$ die Seite $\overline{AB}$ stets in drei gleich lange Teile zerlegen.

12) Gegeben sei ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} < \overline{AC}$ und $\sphericalangle BAC = \alpha$. Sei D derjenige Punkt auf $\overline{AC}$, für den $\overline{CD} = \overline{AB}$ gilt; sei M der Mittelpunkt von $\overline{AD}$ und N der Mittelpunkt von $\overline{BC}$; sei E der Schnittpunkt der beiden Geraden MN und AB.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen stets $\sphericalangle AEM = \frac{1}{2}\alpha$ gilt.

13) Sei ABCD ein Viereck, in dem die Diagonale $\overline{AC}$ den Winkel BAD halbiert. Der Punkt D liege auf der Mittelsenkrechten $m_{AC}$ von $\overline{AC}$ und $m_{AC}$ schneide die Gerade AB im Punkt E.

a) Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen ABCD stets ein Trapez ist.

b) Welches spezielle Viereck liegt vor, falls E = B gilt? Beweise deine Vermutung.

14) In einem Kreis mit dem Mittelpunkt M seien A und C die Endpunkte eines Durchmessers. Durch A und durch C seien zwei Geraden gezogen, die zueinander parallel sind und die den Kreis in B bzw. D schneiden.
Beweise, dass unter diesen Voraussetzungen die Gerade BD stets durch den Mittelpunkt M dieses Kreises verläuft.

**Konstruktionsaufgaben**
[Lies in MatKZM7 den Abschnitt 2.1. (Konstruktionsaufgaben). Lies das Material „Einige geometrische Örter". Lies auf S. 6-7 „Regeln zum Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben".]

15) Zu konstruieren sind alle (bis auf Kongruenz verschiedene) Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) $\overline{AC} = b = 5$ cm;
(b) $\overline{CH} = h_c = 4$ cm;
(c) $\overline{BS} = s_b = 6$ cm;
(d) $\overline{CH}$ ist eine Höhe im Dreieck ABC;
(e) $\overline{BS}$ ist eine Seitenhalbierende im Dreieck ABC.

a) Beschreibe deine Konstruktion und stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke das Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist.

b) Fertige eine Konstruktionszeichnung an.

16) Zu konstruieren sind alle (bis auf Kongruenz verschiedene) Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) $\overline{BC} = a = 6$ cm;
(b) $\overline{AH_a} = h_a = 4$ cm;

(c) $\overline{AS_a} = s_a = 4{,}5$ cm;
(d) $\overline{AH_a}$ ist eine Höhe im Dreieck ABC;
(e) $\overline{AS_a}$ ist eine Seitenhalbierende im Dreieck ABC.

a) Beschreibe deine Konstruktion und stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke das Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist.

b) Fertige eine Konstruktionszeichnung an.

c) Beweise folgenden Satz: Wenn ein Dreieck ABC wie beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die gegebenen Bedingungen (a) bis (e).

17) Zu konstruieren sind alle (bis auf Kongruenz verschiedene) Vierecke ABCD, die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) $\overline{AB} = a = 8$ cm;
(b) $\overline{CD} = c = 3$ cm;
(c) $\overline{AC} = e = 7$ cm;
(d) $\overline{BD} = f = 6$ cm;
(e) ABCD ist ein Trapez mit AB||CD.

a) Beschreibe deine Konstruktion.

b) Beweise folgenden Satz: Wenn ein Viereck ABCD die Bedingungen (a) bis (e) erfüllt, dann lässt es sich wie beschrieben konstruieren.

18) Zu konstruieren sind alle (bis auf Kongruenz verschiedene) Vierecke ABCD, die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) ABCD ist ein Drachenviereck (mit der Symmetrieachse AC);
(b) $\overline{AC} = f = 7$ cm;
(c) $\overline{AB} + \overline{BC} = s = 10$ cm;
(d) $\sphericalangle BAD = \alpha = 60°$.

a) Gib eine Konstruktionsbeschreibung an.

b) Beweise folgenden Satz: Wenn ein Viereck ABCD die Bedingungen (a) bis (d) erfüllt, dann lässt es sich wie beschrieben konstruieren.

19) Zu konstruieren sind alle (bis auf Kongruenz verschiedene) Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) $\overline{AB} + \overline{BC} = s$;
(b) $\overline{CH} = h_c$;
(c) $\sphericalangle CBA = \beta$;
(d) $\overline{CH}$ ist eine Höhe im Dreieck ABC.

a) Beschreibe deine Konstruktion.

b) Beweise folgenden Satz: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (a) bis (d) erfüllt, dann lässt es sich wie beschrieben konstruieren.

c) Beweise folgenden Satz: Wenn ein Dreieck ABC wie beschrieben konstruiert wird, dann erfüllt es die gegebenen Bedingungen (a) bis (d).

### ***Das Beweisen von mathematischen Sätzen***

Wahre mathematische Aussagen nennt man Lehrsätze oder kurz *Sätze.*

Jeder mathematische Satz enthält *Voraussetzungen* $V_1$, $V_2$, ... , $V_n$ und eine *Behauptung* (B) und lässt sich in der „Wenn-dann-Form“ formulieren:

*Wenn* $V_1$ und $V_2$ und ... und $V_n$ gilt, *dann* gilt auch (B).

Ein *Beweis* ist erbracht, wenn man von den *Voraussetzungen* oder *allgemeingültigen Aussagen* ausgehend in endlich vielen Schritten über *abgeleitete Feststellungen* zur *Behauptung* gelangt, wobei jeder Beweisschritt durch die Angabe des verwendeten *Beweismittels* (Satz, Formel, Umformungsregel, Definition o.ä.) begründet werden muss.

*Beispiel:*

*Satz*: Das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist stets gerade.

$V_1$: $x$ ist gerade; $V_2$: $y$ ist ungerade; (B): $x \cdot y$ ist gerade.

*Beweis:*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Aus $V_1$ | folgt | (1) | $x = 2 \cdot m$ mit $m \in N$; | [nach Definition]. |
| Aus $V_2$ | folgt | (2) | $y = 2 \cdot n + 1$ mit $n \in N$; | [nach Definition]. |
| Aus (1) und (2) | folgt | (3) | $x \cdot y = 2 \cdot m \cdot (2 \cdot n + 1)$; | [Einsetzen]. |
| Aus (3) | folgt | (4) | $x \cdot y = 2 \cdot (2 \cdot m \cdot n + m)$; | [Distributivgesetz]. |
| Aus (4) | folgt | (5) | $x \cdot y = 2 \cdot k$ mit $k \in N$; | [Summen und Produkte von natürlichen Zahlen sind stets auch natürliche Zahlen]. |
| Aus (5) | folgt | (B) | $x \cdot y$ ist gerade; | [Definition]. |

### ***Regeln zum Lösen geometrischer Konstruktionsaufgaben mit Hilfe der Methode der geometrischen Örter und der Methode der Hilfselemente***

- Formuliere die Aufgabe so um, dass *nur Punkte* (und *Bedingungen*) *gegeben und* nur *Punkte gesucht* sind.

Als gegebene Punkte eignen sich die Endpunkte einer Strecke, deren Länge bekannt ist.

- ° Welches sind die beiden (grün zu kennzeichnenden) gegebenen Punkte, welches sind die (rot zu kennzeichnenden) gesuchten Punkte?

  Welche der gegebenen Bedingungen liefert die gegebenen Punkte?

- Ermittle zu jedem gesuchten Punkt (möglichst) zwei *geometrische Örter*.
  - ° Welche der gegebenen Bedingungen liefert einen solchen geometrischen Ort?
  - ° Welche Bedingung wurde noch nicht verwendet? Sie könnte den gesuchten zweiten geometrischen Ort liefern.

Wenn du auf diese Weise nicht sofort ans Ziel gelangst, dann suche nach (konstruierbaren bzw. hinreichenden, blau zu kennzeichnenden) *Hilfspunkten*.

- VA: Welche Hilfspunkte lassen sich aus den gegebenen Bedingungen unmittelbar konstruieren? Welches sind die benötigten beiden geometrischen Örter?
- RA: Aus welchen Hilfspunkten ließe sich der gesuchte Punkt unmittelbar konstruieren?
- Wenn eine Summe $s$ oder eine Differenz $d$ von zwei Streckenlängen gegeben ist, dann erzeuge durch Streckenabtragung einen Hilfspunkt, der Endpunkt einer Strecke ist, deren Länge gleich $s$ bzw. $d$ ist. (Dies ist ein *„naheliegender“* Hilfspunkt.)
- Wähle Hilfspunkte stets so, dass eine Figur entsteht, über die „viel bekannt“ ist (gleichseitiges, gleichschenkliges oder rechtwinkliges Dreieck; Parallelogramm, Sehnenviereck, Tangentenviereck u.ä.).
- Welche („gestrichelt“ zu zeichnenden) *Hilfslinien* könnten nützlich sein, um eine derartige nützliche *Hilfsfigur* zu erzeugen?
- Welche *Hilfsmittel* (Sätze, Formeln, Definitionen u.ä.) könnten helfen, aus den gegebenen Größen (Streckenlängen, Winkelgrößen) oder aus den gegebenen Bedingungen weitere Größen oder Bedingungen abzuleiten, die bei der Suche nach geometrischen Örter helfen können?

Ein *Lösungsplan* ist gefunden, wenn man von den *gegebenen Punkten* über die *gefundenen Hilfspunkte* zu den *gesuchten Punkten* gelangen kann, wobei zu jedem konstruierten Punkt *zwei geometrische Örter* bekannt sind.

- Gib zu jedem Hilfspunkt durch eine *Zusatzvoraussetzung* an, wie er konstruiert werden soll.

- Nummeriere die Konstruktionsschritte durch und untersuche, ob bzw. unter welchen Bedingungen das erhaltene geometrische Objekt (bis auf Kongruenz) eindeutig konstruierbar ist.

***Einige Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben***

(1) Was ist *gegeben*, was ist *gesucht*? Führe günstige *Bezeichnungen* (z.B. *Variablen, Symbole*) ein! [Z18, G11]

(1.1) Lassen sich die gegebenen Bedingungen in Form von *Gleichungen* oder *Ungleichungen* festhalten? (Dies erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert das Folgern.) [Z13, Z17]

(1.2) Lassen sich die gegebenen Zahlen oder Größen und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen in einer *Tabelle* übersichtlich festhalten? [Z13, Z15]

(2) *Vorwärtsarbeiten:*
Betrachte das *Gegebene* (Größen, Bedingungen oder Voraussetzungen)!
Welche *Teilziele* lassen sich hieraus unmittelbar erreichen (berechnen, folgern)? Begründe!
[Diese Vorgehensweise ist bei allen Aufgaben anwendbar.]

(2.1) Auf welche *Hilfsmittel* (Sätze, Formeln, Definitionen) weisen die gegebenen Größen, Bedingungen oder Voraussetzungen hin? [Z15, Z18, G7, G12]

(2.2) Mit welcher Bedingung / Voraussetzung sollte man beginnen, welche Bedingung / Voraussetzung sollte man im zweiten Schritt verwenden?
Was lässt sich nun aus den abgeleiteten und den gegebenen Bedingungen / Voraussetzungen folgern? Begründe! [G19]

(3) *Rückwärtsarbeiten:*
Betrachte das *Ziel* (die gesuchte Größe, die Behauptung)!
Von welchem *Teilziel* (Größe; abgeleitete Feststellung) aus kann man das Ziel unmittelbar erreichen? Begründe! [G13, G16, G17, G18]

(3.1) Auf welche *Hilfsmittel* (Sätze, Formeln, Definitionen) weist die gesuchte Größe oder die Behauptung hin? [Z20, G7, G8, G9, G10, G11, G12, G14]

(4) *Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen:*
Ermittle zu jeder der gegebenen Bedingungen die Erfüllungsmenge und bilde den Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen.

(4.1) Die Elemente endlicher Erfüllungsmengen lassen sich durch *systematisches Erfassen aller möglichen Fälle* (systematisches Probieren / vollständige Fallunterscheidung) ermitteln. Verwende dabei ein *Ordnungsprinzip,* dessen Anwendung garantiert, dass tatsächlich alle möglichen Fälle erfasst werden [z.B. der Größe nach, lexikografisch (d.h. alphabetisch) u.ä.]. [Z5, Z7, Z8, Z9]

*Hinweis:* In eckigen Klammern werden jeweils diejenigen Aufgaben aus der Zahlentheorie (Z) oder Geometrie (G) angegeben, bei deren Lösung die Regel anwendbar ist.