# Einige Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben

*(1) Was ist gegeben, was ist gesucht? Führe günstige **Bezeichnungen** (z.B. Variablen) ein!*

*(1.1)Lassen sich die gegebenen Bedingungen in Form von **Gleichungen** oder **Ungleichungen** festhalten? (Dies erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert das Folgern.)*

*(2) Was lässt sich **aus** den gegebenen **Bedingungen** (den gegebenen Größen) unmittelbar **folgern** (berechnen)? Begründe!*

*(2.1)Mit welcher Bedingung sollte man beginnen, welche Bedingung sollte man im zweiten Schritt verwenden?*

*Was lässt sich **nun** aus den abgeleiteten und den gegebenen Bedingungen unmittelbar folgern? Begründe!*

*(3) Verwende beim **systematischen Erfassen aller möglichen Fälle** ein Ordnungsprinzip, dessen Anwendung garantiert, dass tatsächlich alle möglichen Fälle erfasst werden (z.B. der Größe nach, lexikografisch u.ä.).*

*(4) **Rückwärtsarbeiten**:*

*Betrachte das Ziel (die zu erreichende Siegzahl; die gesuchte Größe; die Behauptung)!*

*Von welchem Teilziel (Zahl; Größe; Feststellung) aus kann man das Ziel unmittelbar erreichen? Begründe!*

## Zum Lösen von Gleichungen

*Eine Gleichung (mit der Variablen $x$ ) lösen heißt, alle Zahlen zu ermitteln, die zu einer wahren Gleichheitsaussage führen, wenn man sie für $x$ in die Gleichung einsetzt.*

*In der Grundschule werden Gleichungen durch **systematisches Probieren** oder durch **inhaltliche Überlegungen** gelöst.*

*Beim Lösen von Gleichungen mit Variablen durch **Umformen** wird die Gleichung schrittweise vereinfacht, bis sie die Form $x = \ldots$ angenommen hat. Dabei ist es gestattet*

- *auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl zu addieren oder zu subtrahieren;*
- *beide Seiten der Gleichung mit derselben von $0$ verschiedenen Zahl zu multiplizieren oder durch eine solche Zahl zu dividieren.*

*Beispiel:*

$$\begin{aligned} 8\cdot x - 17 &= 6\cdot x + 3 && \mid -6\cdot x \\ 2\cdot x - 17 &= 3 && \mid +17 \\ 2\cdot x &= 20 && \mid :2 \\ \mathbf{x} &= \mathbf{10} \end{aligned}$$



***Bezirkskomitee Chemnitz zur Förderung mathematisch-naturwissenschaftlich begabter und interessierter Schüler***

**www.bezirkskomitee.de**

# Trainingsaufgaben für die Mathematik-Olympiade

### für Schüler der Klassenstufe 3 zur Vorbereitung auf einen Frühstart in der 2. Stufe der 52. Mathematik-Olympiade, Olympiadeklasse 5

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

du hast in diesem Schuljahr sehr erfolgreich an der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade teilgenommen – herzlichen Glückwunsch!

Wir wünschen dir, dass du auch in den nächsten Jahren ebenso erfolgreich sein kannst. Dabei wollen wir dich unterstützen. Hiermit erhältst du eine Auswahl von Aufgaben, die in den vergangenen Jahren in der Mathematik-Olympiade der Klassenstufe 5 gestellt wurden. Wenn du dich mit diesen Aufgaben beschäftigst, steigen deine Chancen, später selbst bei solchen Wettbewerben gut abzuschneiden.

Natürlich gab es in jedem Jahr einige leichte und einige schwerere Aufgaben. Zum Einstieg in das Training erhältst du erst einmal einige der leichteren Aufgaben – die aber manchmal schon ganz schön knifflig sind, schließlich sind sie für die Klasse 5 gedacht! Damit solltest du dich nun bis zum Schuljahresende regelmäßig beschäftigen. Bearbeite dabei erst die einfacheren Aufgaben (☺), dann die mittleren (😐) und schließlich die schwereren Aufgaben (☹). Deine Betreuerin oder dein Betreuer werden dich dabei beraten. Nach dem Besprechen einer von dir gelösten Aufgabe werden sie dir eine Kopie der Musterlösung geben, damit du lernen kannst, wie man eine solche Lösung aufschreibt.

Wenn du dich durch fleißiges Training gut vorbereitest, wirst du im neuen Schuljahr die Chance haben, bei der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade im November in der Olympiadeklasse 5 zu starten. Wie das genau abläuft, wirst du aber alles rechtzeitig zu Beginn des Schuljahres erfahren.

Die beiliegenden Aufgaben sind in 5 Gruppen eingeteilt (Zuordnungen ermitteln; Verwenden von Variablen/Gleichungen; Folgern ohne Variable; Ermitteln aller Möglichkeiten; Sonstige Aufgaben). Damit du den Überblick über die bereits bearbeiteten Aufgaben behältst, solltest du in der Tabelle immer ankreuzen, welche Aufgabe du schon bearbeitet hast.

Nutze die Möglichkeit, deine Lösungsversuche mit deiner Betreuerin oder deinem Betreuer durchzusprechen. Sie helfen dir gern dabei. Dann kannst du ebenfalls ankreuzen, welche Lösungen du schon durchgesprochen hast.

Zu Beginn des nächsten Schuljahres halten wir für dich den zweiten Teil mit etwas schwierigeren Aufgaben bereit. So kannst du dich auch weiterhin ganz intensiv auf die nächste Mathematik-Olympiade vorbereiten. Wie heißt es doch: Ohne Fleiß kein Preis.

Wir wünschen dir beim Rechnen und Knobeln viel Erfolg und Freude!

| Aufgaben-nummer | Aufgabe bearbeitet | Lösung besprochen | Notizen |
|---|---|---|---|
| 370523 ☺ | | | |
| 430522 ☺ | | | |
| 400523 😐 | | | |
| 430521 ☺ | | | |
| 480521 😐 | | | |
| 450521 ☺ | | | |
| 410521 😐 | | | |
| 450523 😐 | | | |
| 440524 ☹ | | | |
| 460521 ☺ | | | |
| 500524a😐 | | | |
| 420523 😐 | | | |
| 440521 ☹ | | | |
| 500522a☺ | | | |
| 410522 😐 | | | |
| 390521 😐 | | | |
| 410524 ☹ | | | |
| 500521 | | | |
| 400522 😐 | | | |
| 390522 😐 | | | |



**Aufgabe 400522** (53%)

Zerlege den abgebildeten Quadratring

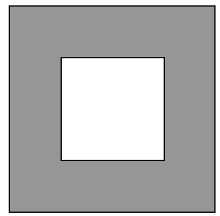
a) durch zwei Geraden in vier gleichgroße Teilstücke.

b) durch drei Geraden in sechs gleichgroße Teilstücke.

c) durch vier Geraden in acht gleichgroße Teilstücke.

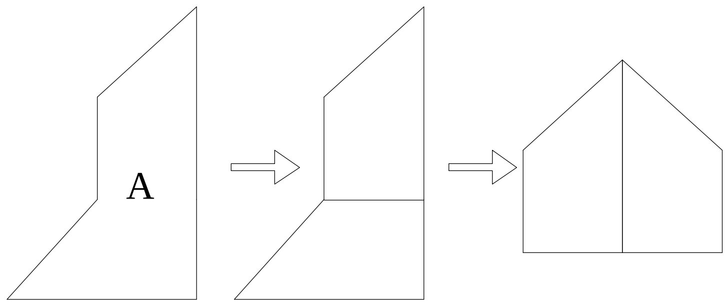
d) durch sechs Geraden in zwölf gleichgroße Teilstücke.

Das innere Quadrat hat dabei die halbe Kantenlänge des äußeren Quadrates.



**Aufgabe 390522** (52%)

Die Figur A kann so in zwei Teile zerschnitten werden, dass sich die rechte Figur ergibt. Diese ist symmetrisch.




Gib vier weitere Möglichkeiten an, wie man die Figur A in zwei Teile zerschneiden und diese Teile zu einer symmetrischen Figur zusammensetzen kann!

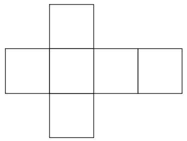
Es genügt, jeweils den Schnitt anzugeben und dann die neu zusammengesetzte symmetrische Figur zu zeichnen.

**Aufgabe 390521** (52%): Wir betrachten alle dreistelligen Zahlen.

a) Bei wie vielen dieser Zahlen ist die letzte Ziffer die Summe der ersten beiden Ziffern?

b) Bei wie vielen Zahlen ist die letzte Ziffer die Differenz der ersten beiden Ziffern?
Das heißt: Bei wie vielen dreistelligen Zahlen ergibt sich die letzte Ziffer, wenn man die zweite Ziffer von der ersten *oder* die erste von der zweiten subtrahiert?

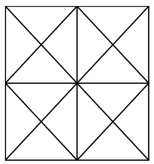
**Aufgabe 410524** (47%)



Hexominos sind zusammenhängende Figuren, die aus 6 Quadraten zusammengesetzt sind. Die Hexominos, aus denen man durch Zusammenkleben Würfel bauen kann, heißen Würfelnetze. Es gibt verschiedene Würfelnetze. Das bekannteste ist in der Abbildung zu sehen.

Versuche, alle Würfelnetze zu finden, und zeichne sie auf.

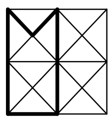
## V. Sonstige Aufgaben



**Aufgabe 500521** (77%): Niklas hat in der 1. Stufe der Mathematik-Olympiade in der rechts gezeigten Figur vorkommende Vierecke gezählt

a) Susi findet in der Figur auch Fünfecke. Es gibt viele vorkommende Formen bzw. Größen. Dabei sollen sich die Fünfecke in Form oder Größe unterscheiden, sie sollen also nicht deckungsgleich sein.
Finde mindestens sechs dieser verschiedenen Fünfecke.
Zeichne für jedes deiner gefundenen Fünfecke eine neue Grundfigur und kennzeichne das Fünfeck farbig.

b) Niklas möchte Sechsecke in der Figur finden. Finde mindestens vier verschiedene Sechsecke und verfahre wie in Aufgabenteil a).



*Hinweis*: Die Fünfecke und Sechsecke können auch „eingedellt“ sein, wie in der nebenstehenden Abbildung für ein Fünfeck zu sehen ist. (Dieses Fünfeck darfst du natürlich nicht mehr angeben.)



Die Aufgaben sind den Mathematik-Olympiaden der Schuljahre 1997/98 (37. MO) bis 2010/11 (50. MO) entnommen; man erkennt dies in der Aufgabennummer an den ersten beiden Ziffern. Sie wurden jeweils in der 2. Stufe (die 5. Ziffer in der Aufgabennummer) in der Olympiadeklasse 5 (die 4. Ziffer) gestellt. Die letzte Ziffer der Aufgabennummer gibt die Nummer der Aufgabe im Wettbewerb an.

Beispiel **Aufgabe 420523**: In der **42**. Mathematik-Olympiade in der Olympiadeklasse **05** zur **2**. Stufe die **3**. Aufgabe.

Beachte beim Bearbeiten den allgemeinen Hinweis:

> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen bzw. Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

## I. Zuordnungen ermitteln

**Aufgabe 370523** (68%)

Für vier Mädchen (Barbara, Konstanze, Leni und Zenzi) und vier Jungen (Alois, Franz, Hubert und Vinzenz) ereignete sich gestern Abend Einiges und Einiges nicht. Es waren vier Paare unterwegs, jedes Paar (eines der Mädchen mit einem der Jungen) an genau einem von vier Orten; an keinem dieser Orte waren mehr als ein Paar:

(1) Alois war im Konzert.
(2) Hubert war mit Konstanze zusammen.
(3) Vinzenz war nicht mit Zenzi zusammen.
(4) Leni war im Kino.
(5) Zenzi war im Theater.
(6) Eines der Paare besuchte eine Ausstellung.

Wer war mit wem zusammen, und wo?

**Aufgabe 430522** (65%)

Arndt, Bertram, Cecil und Dirk gehen in eine Schule, an der Arbeitsgemeinschaften in Mathematik, Schach, Turnen und Zeichnen angeboten werden. Jeder dieser Schüler hat sich für eine dieser Arbeitsgemeinschaften angemeldet, und zwar jeder für eine andere. Folgendes ist bekannt:

(1) Bertram wollte ursprünglich in die Schach-AG gehen, hat sich dann aber doch anders entschieden.
(2) Der „Turner“, der „Zeichner“ und Bertram haben denselben Schulweg.
(3) Der „Turner“ ist eine Leseratte und verschlingt zurzeit die Bücher über Harry Potter.
(4) Cecil ärgert sich, dass er bei der Mathematik-Olympiade schlechter abgeschnitten hat als der „Turner“.
(5) Arndt wurde vom „Zeichner“ zum Geburtstag eingeladen.
(6) Weder Dirk noch der „Zeichner“ haben bisher ein Buch über Harry Potter gelesen, wollen dies jedoch schleunigst nachholen.

a) Welche Arbeitsgemeinschaft besucht Bertram? Stelle dar, wie du deine Antworten aus den Angaben (1) bis (6) folgerst.

b) Untersuche, ob sich aus den Angaben (1) bis (6) auch klar und eindeutig ableiten lässt, welche Arbeitsgemeinschaften die anderen drei Jungen besuchen.

**Aufgabe 400523** (57%)

Vier Freunde sind begeisterte Ballspieler; von ihnen spielt je einer Fußball, Handball, Streetball und Tischtennis. Sie verbrachten eine Ferienwoche miteinander. An vier Abenden aßen sie gemeinsam am gleichen Tisch.

- Benni saß immer am selben Platz, die anderen Plätze waren an jedem Abend anders besetzt.
- Am Montag hatte Gerrit den Streetballer zu seiner rechten und den Handballer zu seiner Linken.
- Am Dienstag saß links neben Benni der Fußballer, und der andere Nachbar des Fußballers war Gerrit.
- Am Mittwoch hatte Hannes den Streetballer zur Rechten und den Fußballer zur Linken.

*(Aufgabe wird auf der nächsten Seite fortgesetzt)*



**Aufgabe 440521** (43%)

a) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 167. Die letzte Ziffer der größeren der beiden Summanden ist eine 2. Streicht man diese Ziffer 2, so erhält man den kleineren der beiden Summanden.
Um welche beiden Summanden handelt es sich? Mache eine Probe.

b) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 525. Die letzte Ziffer der größeren der beiden Summanden ist eine 8. Streicht man diese Ziffer 8, so erhält man den kleineren der beiden Summanden.
Um welche beiden Summanden handelt es sich? Mache eine Probe.

---

## IV. Ermitteln aller Möglichkeiten

**Aufgabe 500522a**

Merle und Mira betrachten auf der Wiese Marienkäfer und stellen fest, dass nicht alle die gleiche Anzahl von Punkten haben. Immer aber sind die Punkte auf den beiden Flügeln spiegelgleich angeordnet.
Für ihren Mathematikklub erfinden sie *eigene* Marienkäfer, die auch *ungleiche* Anzahlen von Punkten auf den beiden Flügeln haben können; aber jeder Flügel hat mindestens einen Punkt und höchstens sechs. Es gibt auch keine „geteilten“ Punkte. Da man bei Marienkäfern linke und rechte Flügel unterscheiden kann, soll der (6 | 1)-Marienkäfer ein anderer sein als der (1 | 6)-Marienkäfer; der (6 | 1) Marienkäfer hat auf dem linken Flügel sechs Punkte und auf dem rechten Flügel einen Punkt.

a) Wie viele verschiedene Marienkäfer können sich die Mädchen ausdenken, wenn die Summe der Punkte auf beiden Flügeln zusammen nicht größer als 6 sein soll?

**Aufgabe 410522 (**53%)

a) Die Pizzeria Mamma Mia bietet für ihre Pizzas fünf verschiedene Beilagen an, und zwar Ananas, Champignons, Gemüsezwiebeln, Peperoni und Salami. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für Pizzas mit drei Beilagen?

b) Mamma Mia hat jetzt noch Thunfisch im Angebot.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es jetzt?

## III. Folgern ohne Variable

**Aufgabe 460521** (66%): Die Klassenstufe 5 hat eine Schulfeier. Weil die Schüler ein Theaterstück eingeübt haben, wurden die Eltern eingeladen.

a) Es waren genauso viele weibliche wie männliche Personen im Saal. Die Anzahl der Jungen und Väter war gleich, aber es waren doppelt so viele Frauen wie Mädchen da. Im Aufführungssaal gab es 110 Plätze; vierzehn bleiben unbesetzt.
Wie viele Mädchen, Jungen, Frauen und Väter waren zur Theateraufführung gekommen?

b) Das Theaterstück war leider schrecklich. Deswegen verließen in der Pause einige junge Personen den Saal, und zwar gleich viele Jungen wie Mädchen. Nunmehr gab es viermal so viele Frauen wie Mädchen.
Wie viele Stühle waren jetzt unbesetzt?

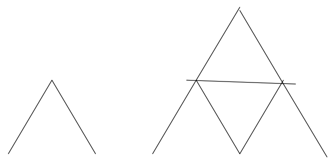
**Aufgabe 500524a**: Die acht Schülerinnen Jule, Karo, Anne, Luisa, Nele, Rafaela, Svenja und Petra wollen nicht mehr an ihren Zweiertischen so sitzen wie bisher. Sie stellen folgende Forderungen für ihre neue Sitzordnung auf:

(1) Petra will neben Luisa oder neben Svenja sitzen.
(2) Nele will neben Anne oder neben Luisa sitzen.
(3) Karo will neben Jule oder neben Luisa sitzen.
(4) Raphaela will neben Svenja oder neben Anne sitzen.
(5) Jule will nicht neben Karo sitzen und auch nicht neben Petra.

a) Gib eine Sitzordnung an, die alle Wünsche erfüllt. Wer sitzt neben wem? Begründe deine Antwort.

**Aufgabe 420523** (51%)

Aus zwei Karten kann man den Anfang eines Kartenhauses bauen (siehe Abbildung). Um ein zweistöckiges Kartenhaus zu bauen, benötigt man sieben Karten (siehe Abbildung).



a) Wie viele Karten benötigt man für ein vierstöckiges Haus?

b) Wie viele Stockwerke hat ein Kartenhaus, das man aus den 104 Karten eines Kartenspiels bauen kann? Wie viele Karten bleiben übrig?



- Am Donnerstag saß links vom Tischtennisspieler der Handballer; gegenüber dem Handballer saß Daniel.

a) Wer spielte was?

b) Gib die Sitzordnung am Donnerstag an.

---

## II. Verwenden von Variablen/Gleichungen

**Aufgabe 430521** (72%)

Fünf Kinder, Andrea, Bettina, Christian, Dirk und Eva, reden über ihre Murmeln.

- Andrea sagt: Zusammen haben wir 65 Murmeln.
- Bettina sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Andrea.
- Christian sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Bettina.
- Dirk sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Christian.
- Eva sagt: Ich habe fünf Murmeln mehr als Dirk.

Wie viele Murmeln haben die Kinder jeweils?

**Aufgabe 480521** (56%)

Beim Schulsportfest trugen die fünf Freundinnen Anja, Bea, Clara, Dana und Elke untereinander einen Wettbewerb im Weitsprung aus. Alle zusammen schafften 15,20 m.
Anja und Bea sprangen zusammen 6 m, wobei Bea 60 cm weiter sprang als Anja. Elke sprang 40 cm weniger als Dana, beide zusammen schafften 6,40 m.

a) Wie weit sprang Anja?

b) Wie weit sprang Clara?

c) Gib alle fünf Sprungweiten an und ordne sie. Stimmt es, dass Beate gewonnen hat und dass Anja Letzte geworden ist?
Weise durch eine Probe am Text nach, dass deine Ergebnisse richtig sind.

**Aufgabe 450521** (64%)

Nach dem Abschluss eines Sportfestes vergleichen Arne, Bert, Carsten, Daniel, Erik und Felix ihre Ergebnisse im Hochsprungwettbewerb. Dabei stellten sie fest:

(1) Bert sprang höher als Daniel.
(2) Erik sprang höher als Bert.
(3) Arne war in der Endwertung unmittelbar vor Felix.
(4) Daniel blieb länger im Wettbewerb als Carsten.
(5) Felix ist vor Carsten ausgeschieden.

a) Ermittle aus diesen Angaben die Reihenfolge der sechs Jungen beim Hochsprung.

b) Die Ergebnisliste sagt aus, dass Arne, Bert und Carsten zusammen genau so hoch gesprungen sind wie Daniel, Erik und Felix zusammen. Der Schiedsrichter ist sich aber nicht ganz sicher, ob die Liste stimmt, er weiß aber genau, dass jeder der Schüler eine andere Höhe erreicht hat. Zeige, dass die Aussage der Ergebnisliste stimmen kann, indem du für jeden der Schüler eine passende Höhe angibst.

**Aufgabe 410521** (55%)

Katharina hat in ihrem Bücherregal 84 Bücher stehen.
Sie nimmt vom oberen Regalbrett 9 Bücher, vom mittleren 5 und stellt diese Bücher auf das untere Regalbrett.
Nun stehen auf dem mittleren Brett doppelt so viele Bücher wie oben, und es stehen unten doppelt so viele Bücher wie in der Mitte.

a) Wie viele Bücher standen nach dem Umräumen auf jedem der drei Bretter?

b) Wie viele standen vor dem Umräumen auf jedem der drei Bretter?

Überzeuge dich jeweils durch eine Probe, dass du richtig gerechnet hast.



**Aufgabe 450523** (52%)

Familie Fröhlich möchte heute zur 17:30-Uhr-Vorstellung ins Kino gehen. Weil alle am Nachmittag etwas anderes zu tun haben, treffen sie sich vor dem Kino.

(1) Rico wartet doppelt so lange auf den Vater, wie die Mutter auf Nadine.
(2) Auf die Mutter braucht Rico nur 20 Minuten zu warten, sie kommt eine Viertelstunde vor der Zeit.
(3) Nadine kommt eine Viertelstunde nach dem Vater.
(4) Nadine kommt so viele Minuten vor der Zeit, wie Rico auf den Vater wartet.

a) In welcher Reihenfolge treffen die Familienmitglieder vor dem Kino ein?

b) Gib zu jedem Familienmitglied die Uhrzeit an.

**Aufgabe 440524** (44%)

Die Familien Berger, Frärich, Köhler, Mikuscheit, Richter und Schulte wohnen in einer Sackgasse in einer Vorortsiedlung nebeneinander. Über die gegenseitige Lage ihrer Häuser ist bekannt:

(1) Wenn Herr Frärich von der Arbeit kommt, muss er am Haus der Köhlers vorbei und klingelt dort, um seine Kinder abzuholen. Dann fährt er weiter in seine Garage, die zwischen seinem Haus und dem der Richters steht.
(2) Frau Schulte hat es zu Frau Köhler und zu Frau Richter gleich weit.
(3) Mikuscheits und Richters wohnen am weitesten auseinander.

Die Häuser tragen die Nummern 1 bis 6, und das Haus mit der Nummer 1 liegt am Anfang der Sackgasse.
Welche Familie hat welche Hausnummer?
Weise nach, dass sich aus den Bedingungen (1), (2) und (3) die Zuordnung zwischen den Familien und den Hausnummern eindeutig ableiten lässt.