

Material zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klassen 6/7, Teil 1

Inhaltsverzeichnis	Seiten- anzahl
1. Einleitung / Hinweise zur Betreuung / Arbeitsmaterial für Teil 1	10
2. Aufgaben	10
2.1. Sachaufgaben	(13 Aufgaben) (S)
2.2 Logik / Kombinatorik	(10 Aufgaben) (L)
2.3 Zahlentheorie	(12 Aufgaben) (Z)
2.5 Geometrie	(8 Aufgaben) (G)
3. Lösungen	22
4. Hinweise zur Lösungsfindung	<u>14</u> 56

Kontaktadresse: hww.koenig@t-online.de

Hiermit gestatten wir den Besuchern unserer Seite, sich dieses Material von unserer Homepage zum persönlichen Gebrauch herunter zu laden.

Dieses Material knüpft an analoges Material für Schüler der Klassen 5/6 an, das man ebenfalls auf unserer Homepage www.bezirkskomitee.de findet.

Den Teil 2 dieses Materials werden wir zu Beginn des nächsten Schuljahrs für Klasse 7 zur Verfügung stellen.

Im Regierungsbezirk Chemnitz verwenden wir noch eine Datei, mit deren Hilfe man (in Papierform) eine Aufgabensammlung in Form einer 16-seitigen Broschüre herstellen kann, die außer den Aufgaben auch „Arbeitsmaterial für Teil 1“ enthält. Interessenten können diese Datei über die Kontaktadresse erhalten.

Wir wären allen Nutzern dieses Materials für eine Information über dessen Einsatz nebst Einschätzung, gewonnenen Erfahrungen und entdeckten Fehlern sehr dankbar!

Einleitung

Dieses Material wurde vor allem für diejenigen Personen entwickelt, die mathematisch interessierte Kinder unterstützen, welche keine Möglichkeit haben, an Schularbeitsgemeinschaften, Korrespondenzzirkeln oder anderen Formen der außerunterrichtlichen Förderung teilzunehmen. Es kann auch von Lehrern genutzt werden, die in ihrer Region eine außerunterrichtliche Förderung für Schüler, die sich auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade vorbereiten möchten, aufbauen wollen. Dabei sei hervorgehoben, dass wir die Mathematik-Olympiaden nicht als Selbstzweck sondern nur als ein besonders effektives Hilfsmittel bei der Förderung mathematisch interessierter und begabter Schüler auffassen.

Unserer Erfahrung nach sind Schüler nach der 3. Stufe der MO in Klasse 6 noch nicht in der Lage, derartiges Material selbständig zu nutzen. Falls kein Lehrer für eine Betreuung zur Verfügung steht, sollte ein Elternteil oder eine Person aus dem Bekanntenkreis diese Aufgabe übernehmen. Das von uns empfohlene Vorgehen bei der Betreuung findet man unter „Hinweise zur Betreuung“.

Im Schuljahr 1973/74 haben wir in Chemnitz begonnen, gezielt Anleitungen zur außerunterrichtlichen Förderung in Kreisarbeitsgemeinschaften, in Korrespondenzzirkeln (KZM) und Spezialistenlagern auf Bezirksebene zu entwickeln und zu erproben. Die hierfür eingesetzten Aufgaben stammen zum größten Teil aus den Mathematik-Olympiaden. Diese Anleitungen wurden ab 1991/92 überarbeitet und den neuen Anforderungen angepasst (siehe die Links „Unser Literaturangebot“ und „Korrespondenzzirkel“ auf unserer Homepage www.bezirkskomitee.de).

Wir wollen das Ereignis „40 Jahre Korrespondenzzirkel und Spezialistenlager im Bezirk Chemnitz“ zum Anlass nehmen, die dabei gewonnenen Erfahrungen in dem vorgelegten Material zusammenzufassen.

Bei dieser außerunterrichtlichen Förderung mathematisch begabter und interessierter Schüler verfolgen wir vor allem folgende beiden Ziele:

- Entwickeln der Fähigkeit zum problemlösenden Denken durch bewusstes Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen
- Entwickeln der Fähigkeit zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können mit Hilfe von Literatur (Erhöhung der „Studierfähigkeit“).

Hinweise zur Betreuung

Vor allem geht es darum, den Schüler zum *selbständigen* Lösen problemhafter Aufgaben anzuregen.

Der Betreuer sollte jeweils etwa 3 bis 5 geeignete Aufgaben zum Bearbeiten auswählen und dem Schüler einen Termin zum Besprechen seiner Lösungsversuche nennen. Wenn der Schüler glaubt, eine Lösung gefunden zu haben, soll er trotzdem die zugehörige *Lösung durcharbeiten*, um im Laufe der Zeit auch die *Technik der Lösungsdarstellung* zu lernen. Wenn er keine Lösung gefunden hat, soll der Betreuer ihm die „*Hinweise zur Lösungsfindung*“ erläutern und ihn zu einem neuen Lösungsversuch auffordern.

Die Aufgaben der vier Aufgabengruppen sind jeweils nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet. Dies trifft auch auf die angegebene Reihenfolge der Aufgabengruppen zu.

Dies legt folgendes *Vorgehen* nahe:

Man beginnt mit Sachaufgaben und logisch-kombinatorischen Aufgaben. Erst nach mehreren Wochen kommen zahlentheoretische Aufgaben und noch später geometrische Bestimmungsaufgaben.

Die **Auswahl und Anordnung der** hier gestellten **Aufgaben** dient dem Ziel, in der außerunterrichtlichen Förderung von Schülern deren *Fähigkeit zum problemlösenden Denken* zu entwickeln. Daher werden hier nur solche Aufgaben gestellt, zu deren Lösung der Schüler kein algorithmisches Verfahren beherrscht, das zum Ziel führt.

Sachaufgaben sind den Schülern aus dem Unterricht in Klasse 5 und 6 bekannt. In der Regel ist hier dem Sachverhalt zu entnehmen, dass eine solche Aufgabe stets *genau eine Lösung* hat. Dies wird durch Fragen oder Aufforderungen folgender Art vorausgesetzt: „Wie viele ...“, „Wann ...“, „Wie lange ...“, „Berechne ...“.

Über den Unterricht hinausgehend soll den Schülern vermittelt werden, dass dies keineswegs selbstverständlich ist. Dies wird durch Formulierungen wie „Weise nach, dass sich eindeutig ermitteln lässt ...“, „Untersuche ob sich eindeutig ermitteln lässt.“ erreicht. Dies geschieht in den Aufgaben S1, S6, S12 und S13.

Logisch-kombinatorische Aufgaben haben die Schüler bereits in der außerunterrichtlichen Förderung der Klassen 5 und 6 kennen gelernt, bei denen in der Regel die eindeutige Lösbarkeit vorausgesetzt wird. Dies ist hier nur noch bei den Aufgaben L1, L2 und L3 der Fall. In allen anderen Aufgaben wird ein Nachweis oder eine Untersuchung gefordert.

Zum ersten Mal werden bei den Aufgaben L1, L4 und L5 *Lösungsschemata* zum Darstellen der Lösung verwendet.

Bei den *zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben* wird der besonders wichtige *Aufgabentyp* „*Ermittle alle ...*“ eingeführt. Um hervorzuheben, dass bei diesen Aufgaben stets ein *Einzigkeitsnachweis* (Herleitung) und ein *Existenznachweis* (Probe) erforderlich sind, werden diese beiden Beweise in der Lösung stets durch I. und II. gekennzeichnet. Am Ende von I. wird stets der damit bewiesene Satz in der Wenn-dann-Form angegeben. Abschließend wird stets hervorgehoben, dass aus I. und II. folgt, dass tatsächlich *alle* gesuchten Elemente ermittelt wurden. Dies geschieht bei den Aufgaben Z3 - Z7.

Hier wird der Schüler aufgefordert, sich *im „Arbeitsmaterial“ Stoff anzueignen*, der über den Unterrichtsstoff hinausgeht. Hier sollte der *Betreuer* folgende Aufgabe übernehmen: Den Schüler zu befähigen, derartiges Material durcharbeiten, etwa durch Unterstreichen der wichtigsten Passagen, der Überprüfung anhand selbst gewählter Beispiele u.Ä. Der Schüler sollte auch die Erfahrung machen, dass ein mathematischer Text in der Regel erst nach dem zweiten Durcharbeiten verstanden werden kann.

Im Unterricht lernt der Schüler die ersten Beweise auf dem Gebiet der Geometrie kennen. Im außerunterrichtlichen Bereich ist es aus didaktischen Gründen günstiger, mit *zahlentheoretischen Beweisaufgaben* zu beginnen.

Zunächst ist es wichtig, dass der zu beweisende Satz in Voraussetzungen und Behauptung aufgespaltet und in der Wenn-dann-Form formuliert wird. Die Voraussetzungen erhalten die Bezeichnungen V_1, V_2, \dots . Um der falschen Auffassung zu begegnen, dass die Behauptung

des Satzes zu beweisen ist, verwenden wir in den Aufgaben Z9 bis Z12 stets die Formulierung „Beweise folgenden Satz“ und beenden die zugehörige Lösung mit „Damit ist bewiesen, dass die Behauptung des Satzes aus dessen Voraussetzungen folgt.“.

Anknüpfend an die bei den logisch-kombinatorischen Aufgaben eingeführten *Lösungsschemata* werden hier bei den Aufgaben Z9 - Z12 *Beweisschemata* verwendet.

Bei den *geometrischen Bestimmungsaufgaben*, die man im Unterricht stellt, werden nur konkrete Größen verwendet. Hier ist es wichtig, die Schüler auch mit *parameterhaltigen Aufgaben* vertraut zu machen, wofür die Aufgaben G2b und G3b bestimmt sind.

In den Aufgaben G3c und G4c wird verlangt, *Bedingungen* für die gegebenen Größen zu *ermitteln*, unter denen eine vorgegebene Behauptung gilt.

Nur in den Aufgaben G1 bis G4 ist eine günstig gezeichnete *Planfigur* gegeben. In allen anderen Aufgaben müssen die Schüler eine solche Figur selbst entwerfen. Hier sollen die Schüler erfahren, dass eine derartige Figur nur der Veranschaulichung und dem Einführen von Bezeichnungen für Punkte, Geraden, Streckenlängen und Winkelgrößen dient und dass sie nicht als Argument in der Lösung verwendet werden darf. Auch das Anfertigen einer *günstigen* Planfigur will erlernt sein!

Wenn der Bearbeiter einer Aufgabe kein algorithmisches Verfahren kennt, das ihn mit Sicherheit zur Lösung führt, dann ist diese Aufgabe für ihn *problemhaft*. In diesem Fall muss eine *Phase der Lösungsfindung*, in der ein *Lösungsplan* gefunden wird, erst erfolgreich abgeschlossen werden, bevor der Bearbeiter mit der von ihm geforderten *Darstellung der Lösung* beginnen kann.

In der ***Phase der Lösungsfindung*** muss der Schüler zuerst die *Aufgabe verstehen*.

Dies beschränkt sich nicht darauf, bei unbekanntem Begriffen (möglichst selbständig aus der Literatur) nach der Definition zu suchen. Man sollte sich fragen, ob man eine *ähnliche Aufgabe* schon einmal gelöst hat, welche günstige *Veranschaulichung* (Figur, Skizze, Tabelle u.Ä.) möglich ist, welches die *Startgrößen* (gegebene Größen oder Bedingungen; Voraussetzungen) und *Zielgrößen* (gesuchte Größe oder Antwort; Behauptung) sind, welche *günstigen Bezeichnungen* (Variable, zweckmäßige Symbolik) man einführen kann, um sie übersichtlich festhalten zu können.

Bei vielen Sachaufgaben und zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben ist es günstig, für rationale Zahlen oder ganze Zahlen *Variable* einzuführen und den Aufgabentext in die *Sprache der Gleichungen* zu übersetzen. Dies ist bei den Aufgaben S1, S3, S4, S8 - S12 und Z1, Z2, Z7 der Fall. In den Aufgaben Z3 - Z6 sind die Gleichungen im Aufgabentext schon gegeben.

Bei den Aufgaben S13, L1, L3, L4 - L10 ist es günstig, für Namen, Berufe, Unterrichtsfächer u.Ä. *abkürzende Bezeichnungen* einzuführen. Hier darf man nicht vergessen, die Bedeutung der verwendeten Relationszeichen „=“, „≠“ und „<“ explizit zu erläutern.

Wenn man die Aufgabe in der beschriebenen Weise verstanden hat, sollte man sich für eine *Lösungsstrategie* entscheiden.

Erfahrungsgemäß neigen Schüler der Klassenstufen 5 und 6 mehr zum *Probieren* als zum *Folgern*. Schon in diesen Klassenstufen sollte man versuchen, ihnen ein *systematisches Probieren* unter Einsatz eines *Ordnungsprinzips* (lexikografisch, der Größe nach, u.Ä.) beizubringen. Das *systematische Erfassen aller Möglichkeiten* und das Erstellen einer *vollständigen Fallunterscheidung* wird bei den Aufgaben Z3 bis Z10 angewendet.

Auch in den Klassenstufen 6 und 7 gibt es noch Schüler, die Aufgaben durch *Probieren* lösen wollen, bei denen das *Folgern* angemessener ist. Sie sind nicht bereit, die angegebene Lösung durchzuarbeiten, um so das *Folgern* zu *lernen*. Es ist daher eine wichtige Aufgabe des Betreuers, die Schüler anzuhalten, auch dann die vorgeschlagene Lösung durchzuarbeiten, wenn sie glauben, die Aufgabe gelöst zu haben. Nur auf diese Weise können sie sich die Technik der Lösungsdarstellung aneignen.

Beim *Folgern aus gegebenen Bedingungen* ist es oft entscheidend, in welcher *Reihenfolge* man aus diesen Bedingungen folgert. Man sollte stets nach der vermutlich *„informativsten“ Bedingung* suchen, welche die Menge der potenziellen Lösungen am meisten einschränkt.

Dies ist bei den Aufgaben S6, S13, L1 - L10, L4, L5, L8 - 10, Z3 - Z7, G1 und G4 der Fall.

Das Berechnen von Größen aus gegebenen Größen sowie das Folgern aus gegebenen Bedingungen oder Voraussetzungen fassen wir unter dem Begriff „Vorwärtsarbeiten“ zusammen. Diese Lösungsstrategie ist bei allen Aufgaben einsetzbar und wohl auch allen Aufgabenlösern bekannt.

Die *Teilzielfrage beim Vorwärtsarbeiten* lautet: Welche (*ableitbaren*) Teilziele kann man von den Startgrößen ausgehend unmittelbar erreichen? Begründe!

Die *Hilfsmittelfrage beim Vorwärtsarbeiten* lautet: „Mit welchem Hilfsmittel (Satz, Formel, Definition, Umformungsregel u.Ä.) kann man von den Startgrößen ausgehend Teilziele erreichen?“

Ebenfalls bei allen Aufgaben einsetzbar aber keineswegs allen Aufgabenlösern bekannt ist die Lösungsstrategie *Rückwärtsarbeiten*.

Hier lautet die *Teilzielfrage*: Von welchem (*hinreichenden*) Teilziel aus kann man das Ziel unmittelbar erreichen? Begründe!

Die *Hilfsmittelfrage* lautet: Mit welchem Hilfsmittel könnte man das Ziel unmittelbar erreichen?

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Lösungsfindung sind *Tabellen*. In den „Regeln“ findet man Hinweise auf „Tabellen als Hilfsmittel *beim Lösen von Zuordnungsaufgaben*“ und „Tabellen als Hilfsmittel *beim Lösen von Sachaufgaben*“. Solche Tabellen können eine vollständige und korrekte Lösung durch Folgern nicht ersetzen, weil die erforderlichen Begründungen fehlen.

Beispiele hierfür findet man in den Aufgaben S3, S7, S9 - 12, L1, L3 - L5, L8, Z1 und Z5.

Tabellen können auch in der Lösungsdarstellung bei Einzigkeitsnachweisen verwendet werden, wenn es um das Festhalten des Resultats beim systematischen Ermitteln aller Möglichkeiten geht, sowie bei Existenznachweisen, wenn überprüft wird, ob die angegebenen Elemente tatsächlich alle gestellten Bedingungen erfüllen. Auf diese Weise kann man die Übersichtlichkeit und „Lesbarkeit“ der Lösung erhöhen.

Beispiele hierfür findet man in den Aufgaben S1, S6, Z3, Z7 und Z8.

In den Aufgaben S5, S10 und S13 werden *Skizzen*, in den Aufgaben L2, L6 und L7 werden *Mengendiagramme* zur Veranschaulichung einer Situation eingesetzt.

Das **Darstellen der Lösung** ist eine erlernbare Technik, die vielen Schülern jedoch recht schwer fällt. Ein sehr häufig auftretender Fehler besteht darin, dass nur die vom Start zum Ziel führenden Teilziele festgehalten werden (in der Form „Es gilt, es gilt, es gilt ... Damit ist bewiesen ...“). Hier ist nicht zu erkennen, aus welchen Startgrößen oder *hergeleiteten Teilzielen* ein *weiteres Teilziel* abgeleitet wird, und es wird auch vergessen, das *verwendete Hilfsmittel* anzugeben.

Ein sehr günstiges didaktisches Hilfsmittel sind hierbei dreispaltige *Lösungsschemata* oder *Beweisschemata*, bei denen äußerlich sichtbar wird, dass eine Lösung aus einer Folge begründeter Folgerungen der Form „Aus ... folgt ... weil ...“ besteht.

Zu diesem Zweck werden die *gegebenen Bedingungen* mit (a), (b), ... bzw. die *Voraussetzungen* mit V_1 , V_2 , ... bezeichnet. Die abgeleiteten *Feststellungen* werden mit (1), (2), ... gekennzeichnet. Der 1. Spalte des Schemas kann dann entnommen werden, woraus jeweils gefolgert wird und bei welchen Schlussfolgerungen die gegebenen Bedingungen oder Voraussetzungen benötigt werden. Dies hat den Vorteil, dass man erkennen kann, wenn eine der Bedingungen oder Voraussetzungen nicht benötigt wird. Im Fall einer „überflüssigen“ Bedingung muss man nachprüfen, ob sie nicht einer der restlichen Bedingungen widerspricht. Im Fall einer überflüssigen Voraussetzung hat man eine Verallgemeinerung des bewiesenen Satzes entdeckt.

Folgende Aufgaben dienen dazu, die Schüler mit dieser Problematik vertraut zu machen: L5, L8 und Z6.

Anhand folgender Aufgaben kann man das Anfertigen solcher Schemata einführen und üben: S11, S12, L1, L4, L5, Z4, Z5, G1 - G4.

Wenn ein Schüler erst einmal gelernt hat, eine Lösung in Form eines solchen Schemas festzuhalten, dann ist er in der Lage, den typischen Schülerfehler einer „unvollständigen“ Lösung zu vermeiden. Der Übergang zu einer sprachlich gefälligeren Textform, wie sie z.B. in den veröffentlichten Lösungen zu den Aufgaben der MO verwendet wird, ist dann problemlos möglich.

Um es dem Schüler zu ermöglichen, diese Darstellungsform zu erlernen, wird die Bezeichnung der gegebenen Bedingungen (a), (b), ... bzw. der Voraussetzungen V_1 , V_2 , ... in der Aufgabe explizit angegeben. Vom Schüler wird lediglich verlangt, in Textform gegebene Bedingungen in die „Kurzform“ einer geeigneten *Zeichensprache* zu übersetzen.

Das **Vermitteln von Wissen**, das über den Unterrichtsstoff hinausgeht, ist bei uns kein Selbstzweck sondern nur ein Hilfsmittel zum Lösen problemhafter Aufgaben.

Dem Unterrichtsstoff wird mit einer Ausnahme nicht voraus gegriffen: Mit dem Lösen einfacher Gleichungen sollte man bereits nach der 3. Stufe der MO in Klasse 6 beginnen und zwar zusammen mit dem Lösen von Sachaufgaben. Dabei ist es erneut wichtig, dass der Betreuer den Schüler motiviert, die vorgeschlagenen Lösungen durchzuarbeiten.

Arbeitsmaterial für Teil 1 der Aufgaben zur Vorbereitung auf die LMO, Klasse 6/7

Einige mathematische und logische Grundlagen

Wenn gefordert wird, dass „alle Elemente zu ermitteln sind, die gegebene Bedingungen erfüllen“, dann sind außer der Angabe der gesuchten Elemente stets zwei Sätze zu beweisen:

- I. Wenn ein Element alle gegebenen Bedingungen erfüllt, dann gehört es zu der angegebenen Lösungsmenge (d.h. es kann keine weiteren Lösungen geben). [*Einzigkeitsnachweis* oder *Herleitung*]
- II. Jedes Element der angegebenen Lösungsmenge erfüllt tatsächlich alle gegebenen Bedingungen. [*Existenznachweis* oder *Probe*]

Diese beiden Sätze sind immer dann zu beweisen, wenn dem Aufgabentext nicht zu entnehmen ist, dass die Bestimmungsaufgabe genau eine Lösung hat.

Dies ist der Fall, wenn der Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit verlangt wird oder wenn untersucht werden soll, ob die Aufgabe eindeutig lösbar ist.

Einer Herleitung (Einzigkeitsnachweis) ist in der Regel nicht zu entnehmen, ob alle gegebenen Bedingungen tatsächlich verwendet wurden oder ob auch „überflüssige“ Bedingungen vorkommen. Aufgaben, bei denen dies der Fall ist, nennt man „*überbestimmt*“.

Eine in der Herleitung nicht verwendete Bedingung kann mit den restlichen Bedingungen verträglich sein, sie kann aber auch einer dieser Bedingungen widersprechen. In diesem Fall hätte die Aufgabe keine Lösung.

Dies erklärt die logische *Notwendigkeit einer Probe* (Existenznachweis) und macht auch klar, dass stets eine *Probe am Aufgabentext* und nicht etwa nur für die Ansatzgleichung erforderlich ist.

Wenn dem Aufgabentext zu entnehmen ist, dass die Aufgabe *genau eine Lösung* hat, dann reicht eine korrekte Herleitung nebst Angabe des Resultats als korrekte Lösung aus. Aus logischer Sicht kann auf eine Probe verzichtet werden.

Um Fehler (z.B. Rechenfehler) in der Herleitung zu entdecken, ist es jedoch stets ratsam, trotzdem eine Probe durchzuführen.

Aus logischer Sicht wäre bei einer derartigen Aufgabe eine Lösung auch dann korrekt, wenn nur das Resultat angegeben und eine Probe durchgeführt wird.

Bei Aufgaben der Mathematik-Olympiade wird jedoch stets eine Herleitung verlangt.

Struktur von Aufgaben und Lösungen

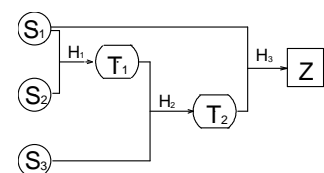
Eine jede Aufgabe enthält Informationen über „Start“ und „Ziel“.

Eine Aufgabe lösen heißt, auf irgendeine Weise irgendeinen Weg vom Start zum Ziel zu finden.

Dieser Weg führt in der Regel über gewisse „Teilziele“, die mit Hilfe gewisser „Hilfsmittel“ erreicht werden.

In solchen Fällen lässt sich der Lösungsplan in Form eines „Lösungsgraphen“ festhalten.

Die Belegung der Knoten und der Kanten eines solchen Graphen ist der nebenstehenden Skizze zu entnehmen.



Die beiden jeweils durch zwei Impulse charakterisierten Vorgehensweisen VA und RA lassen sich wie folgt durch ein Merkschema festhalten:

Die beiden jeweils durch zwei Impulse charakterisierten Vorgehensweisen VA und RA lassen sich wie folgt durch ein Merkschema festhalten:

VA: $\bigcirc \xrightarrow{?} ?$ RA: $? \xrightarrow{?} \square$

Das Beweisen von mathematischen Sätzen

Wahre mathematische Aussagen nennt man Lehrsätze oder kurz *Sätze*.

Jeder mathematische Satz enthält *Voraussetzungen* V_1, V_2, \dots, V_n und eine *Behauptung* (B) und lässt sich in der „Wenn-dann-Form“ formulieren:

Wenn V_1 und V_2 und ... und V_n gilt, dann gilt auch (B).

Ein *Beweis* ist erbracht, wenn man von den *Voraussetzungen* oder *allgemeingültigen Aussagen* ausgehend in endlich vielen Schritten über *abgeleitete Feststellungen* zur *Behauptung* gelangt, wobei jeder Beweisschritt durch die Angabe des verwendeten *Beweismittels* (Satz, Formel, Umformungsregel, Definition o.ä.) begründet werden muss.

Zum Beweisen von Sätzen aus der Teilbarkeitslehre

Beim Beweisen von Sätzen ist es oft nützlich, Aussagen aus der „Wortsprache“ in die „Zeichensprache“ zu übersetzen.

Für „x ist eine natürliche Zahl“ schreibt man „ $x \in \mathbb{N}$ “.

Für „a ist ein Teiler von b“ schreibt man „ $a|b$ “.

Einige weitere Beispiele werden in folgender Tabelle angegeben:

Wortsprache	Zeichensprache
x ist eine gerade Zahl	$x = 2 \cdot n$ mit $n \in \mathbb{N}$
y ist eine ungerade Zahl	$y = 2 \cdot n + 1$
s ist die Summe von drei aufeinander folgenden ungeraden Zahlen	$s = (2 \cdot n + 1) + (2 \cdot n + 3) + (2 \cdot n + 5)$
p ist das Produkt aus zwei ungeraden Zahlen	$p = (2 \cdot n + 1) \cdot (2 \cdot m + 1)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$
a lässt bei Division durch b den Rest r	$a = b \cdot q + r$ mit $q \in \mathbb{N}$
(a ist ein Teiler von b) oder (b ist ein Vielfaches von a)	$b = q \cdot a$

Es gilt der folgende **Satz über die Division natürlicher Zahlen mit Rest:**

Zu jeder Zahl a (als Dividenden) und jeder von 0 verschiedenen Zahl m (als Divisor) gibt es stets genau eine Zahl q (als Quotienten) und eine Zahl r (als Rest), für die folgende Gleichung gilt:

Die Methode des Erstklässlers Gauß

Dieses *Verfahren zum Berechnen eines Summenwertes* ist bei allen Summen anwendbar, bei denen die Differenz aufeinander folgender Summanden konstant ist. Der Mathematiker nennt derartige Summen „*endliche arithmetische Reihen*“.

Bezeichnet a den ersten Summanden, d die konstante Differenz und n die Anzahl der Summanden, dann liefert dieses Verfahren folgende Formel:

$$s = a + (a + d) + (a + 2 \cdot d) + (a + 3 \cdot d) + \dots + [a + (n - 1) \cdot d] = [2 \cdot a + (n - 1) \cdot d] \cdot n : 2$$

Es wäre jedoch unangemessen, sich diese Formel einprägen zu wollen; viel einfacher ist es, sich das *Verfahren* einzuprägen.

Beispiel: $s = 13 + 18 + 23 + \dots + 88 + 93 + 98$ (18 Summanden)

$$\underline{s = 98 + 93 + 88 + \dots + 23 + 18 + 13}$$

$$2s = 111 + 111 + 111 + \dots + 111 + 111 + 111$$
 (18 Summanden)

$$s = \frac{1}{2} \cdot 111 \cdot 18 = 999$$

Mengendiagramme

Wir führen folgende *Bezeichnungen* ein:

G: Anzahl der Elemente der „Gesamtmenge“

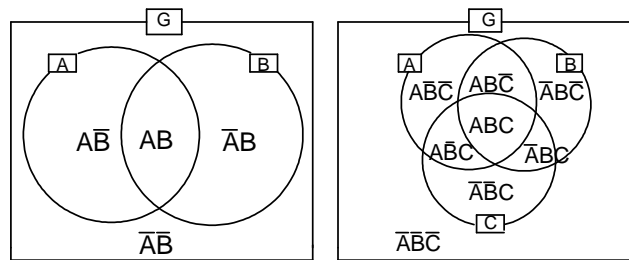
A: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a haben

AB: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a *und* auch die Eigenschaft b haben

$A\bar{B}$: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a haben *und* die Eigenschaft b *nicht* haben

$\bar{A}\bar{B}$: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a *nicht* haben *und* auch die Eigenschaft b *nicht* haben.

Kommen mehr als zwei Eigenschaften vor, dann wird analog bezeichnet.



Tabellen als Hilfsmittel beim Lösen von Zuordnungsaufgaben

- Führe für die Elemente der Mengen, die einander zuzuordnen sind, *günstige Bezeichnungen* ein, z.B. $M_1 = \{a, b, c, d, e\}$ und $M_2 = \{A, B, C, D, E\}$.
 - Wenn drei Mengen M_1 , M_2 und M_3 gegeben sind, dann ist es günstig, für jedes der Paare $[M_1, M_2]$, $[M_1, M_3]$ und $[M_2, M_3]$ eine Zuordnungstabelle anzufertigen.
- Wenn in der Aufgabenstellung die gegebenen Bedingungen nicht bereits als (1), (2), (3), ... oder (a), (b), (c), ... bezeichnet sind, dann führe solche *Bezeichnungen* ein.
- Fertige eine *Tabelle* an, in deren Zeilen- bzw. Spalteneingängen die einander zuzuordnenden Elemente stehen.
- Wenn aus einer Bedingung (*) folgt, dass eine Zuordnung (x, Y) gilt, dann trage in das zugehörige Feld der Tabelle ein „+, (*)“ ein. Wenn jedoch folgt, dass diese Zuordnung nicht gelten kann, dann trage ein „-, (*)“ ein.
- Wenn in einer Zeile oder Spalte in allen Feldern mit Ausnahme eines Feldes ein „-“ steht, dann trage in dieses Feld (als letzte verbleibende Möglichkeit) ein „+“ ein und gib dieser so ermittelten Zuordnung einen Namen (#). In die Felder der zugehörigen Spalte oder Zeile wird (da die gefundene Zuordnung eindeutig ist) ein „-, (#)“ eingetragen.
- Wenn die Aufgabe genau eine Lösung hat, dann kann man auf die angegebene Weise alle Felder der Tabelle füllen und hat so die Lösung gefunden. [L1, L3, L4, L5, L8]

Einige Regeln zum Lösen problemhafter Aufgaben

- (1) Was ist *gegeben*, was ist *gesucht*? Führe günstige *Bezeichnungen* (z.B. *Variablen*, *Symbole*) ein!
 - (1.1) Lassen sich die gegebenen Bedingungen in Form von *Gleichungen* oder *Ungleichungen* festhalten? (Dies erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert das Folgern.) [S1, S3, S4, S8 - S12, Z1, Z2, Z7, Z8, Z12]
 - (1.2) Lassen sich die gegebenen Zahlen oder Größen und die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen in einer *Tabelle* übersichtlich festhalten? [S3, S7, S9 - S12, L1, L3 - L5, L8, Z1, Z3, Z5, Z7, Z8, Z10]
- (2) *Vorwärtsarbeiten*:
Betrachte das *Gegebene* (Größen, Bedingungen oder Voraussetzungen)!
Welche *Teilziele* lassen sich hieraus unmittelbar erreichen (berechnen, folgern)? Begründe! [Diese Vorgehensweise ist bei allen Aufgaben anwendbar.]
 - (2.1) Auf welche *Hilfsmittel* (Sätze, Formeln, Definitionen) weisen die gegebenen Größen, Bedingungen oder Voraussetzungen hin?
[Diese Frage ist beim Lösen aller Aufgaben nützlich.]
 - (2.2) Mit welcher Bedingung / Voraussetzung sollte man beginnen, welche Bedingung / Voraussetzung sollte man im zweiten Schritt verwenden?
Was lässt sich nun aus den abgeleiteten und den gegebenen Bedingungen / Voraussetzungen folgern? Begründe!
[S6, S13, L1 - 10, Z3 - Z7, Z8b, Z10, G1, G4]
- (3) *Rückwärtsarbeiten*:
Betrachte das *Ziel* (die gesuchte Größe, die Behauptung)!
Von welchem *Teilziel* (Größe; abgeleitete Feststellung) aus kann man das Ziel unmittelbar erreichen? Begründe!
[S5, Z16, G2 - G4]
- (3.1) Auf welche *Hilfsmittel* (Sätze, Formeln, Definitionen) weist die gesuchte Größe oder die Behauptung hin?
- (4) *Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen*:
Ermittle zu jeder der gegebenen Bedingungen die Erfüllungsmenge und bilde den Durchschnitt dieser Erfüllungsmengen. [Z5]
- (4.1) Die Elemente endlicher Erfüllungsmengen lassen sich durch *systematisches Erfassen aller möglichen Fälle* (systematisches Probieren) ermitteln. Verwende dabei ein *Ordnungsprinzip*, dessen Anwendung garantiert, dass tatsächlich alle möglichen Fälle erfasst werden [z.B. der Größe nach, lexikografisch (d.h. alphabetisch) u.ä.]. [Z5, Z7, Z8, Z9]