

Material zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klassen 7/8, Teil 1

Inhaltsverzeichnis	Seiten- anzahl
1. Einleitung / Hinweise zur Betreuung	7
2. Aufgaben	7
2.1. Sach- und Anwendungsaufgaben	(12 Aufgaben) (S)
2.2. Zahlentheorie	(9 Aufgaben) (Z)
2.3. Kombinatorik / Logik	(8 Aufgaben) (KL)
2.4. Geometrie	(8 Aufgaben) (G)
3. Lösungen	23
4. Hinweise zur Lösungsfindung	<u>5</u>
	42

Kontaktadresse: hww.koenig@t-online.de

Hiermit gestatten wir den Besuchern unserer Seite, sich dieses Material von unserer Homepage zum persönlichen Gebrauch herunter zu laden.

Dieses Material knüpft an analoges Material für Schüler der Klassen 5/6 und 6/7 an, das man ebenfalls auf unserer Homepage www.bezirkskomitee.de findet.

Den Teil 2 dieses Materials werden wir zu Beginn des nächsten Schuljahrs für Klasse 8 zur Verfügung stellen.

Im Regierungsbezirk Chemnitz verwenden wir noch eine Datei, mit deren Hilfe man (in Papierform) eine Aufgabensammlung in Form einer 12-seitigen Broschüre herstellen kann, die außer den Aufgaben auch „Arbeitsmaterial für Teil 1“ enthält. Interessenten können diese Datei über die Kontaktadresse erhalten.

Wir wären allen Nutzern dieses Materials für eine Information über dessen Einsatz nebst Einschätzung, gewonnenen Erfahrungen und entdeckten Fehlern sehr dankbar!

Einleitung

Dieses Material wurde vor allem für diejenigen Personen entwickelt, die mathematisch interessierte Kinder unterstützen, welche keine Möglichkeit haben, an Schularbeitsgemeinschaften, Korrespondenzzirkeln oder anderen Formen der außerunterrichtlichen Förderung teilzunehmen. Es kann auch von Lehrern genutzt werden, die in ihrer Region eine außerunterrichtliche Förderung für Schüler, die sich auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade vorbereiten möchten, aufbauen wollen. Dabei sei hervorgehoben, dass wir die Mathematik-Olympiaden nicht als Selbstzweck sondern nur als ein besonders effektives Hilfsmittel bei der Förderung mathematisch interessierter und begabter Schüler auffassen.

Den vorliegenden Teil 1 des Materials sollten die Eltern und Lehrer bei denjenigen Schülern einsetzen, die an der 3. Stufe (Landesrunde) der Mathematik-Olympiade für Klasse 7 (im Februar / März) erfolgreich teilgenommen haben. Wenn dies nicht der Fall ist, dann ist ein Einsatz zu Beginn des Schuljahrs in Klasse 8 für diejenigen Schüler geeignet, die sich auf eine Teilnahme an der 2. Stufe der MO (im November) vorbereiten wollen mit dem Ziel, die 3. Stufe der MO zu erreichen.

Bei dieser außerunterrichtlichen Förderung mathematisch begabter und interessierter Schüler verfolgen wir vor allem die folgenden beiden *Ziele*:

- Entwickeln der *Fähigkeit zum problemlösenden Denken* durch bewusstes Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen
- Entwickeln der Fähigkeit zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können mit Hilfe von Literatur (Erhöhung der „Studierfähigkeit“).

Für das letztgenannte Ziel setzen wir das Material „*Korrespondenzzirkel Mathematik - Arbeitsmaterial für Klasse 7*“, „*Korrespondenzzirkel Mathematik - Arbeitsmaterial für Klasse 8*“ sowie zugehöriges Begleitmaterial (z.B. „*Einige grundlegende planimetrische Sätze*“, „*Beiblatt zur Kombinatorik*“) ein, das man bei www.bezirkskomitee.de unter Mathematik / unser Literaturangebot bestellen kann.

Auch Schüler der Klassen 7/8 sind meist noch nicht in der Lage, derartiges Material selbständig zu nutzen. Falls kein Lehrer für eine Betreuung zur Verfügung steht, sollte ein Elternteil oder eine Person aus dem Bekanntenkreis diese Aufgabe übernehmen. Das von uns empfohlene Vorgehen bei der Betreuung findet man unter „Hinweise zur Betreuung“.

27 der 38 Aufgaben stammen aus den 3. Stufen der 39. bis 52. MO. Die Formulierung der Lösungen wurde in der Regel nicht wörtlich übernommen, sondern den didaktischen Zielen des vorliegenden Materials angepasst.

Außer den *Aufgaben* (mit Hinweisen zum Erarbeiten von Arbeitsmaterial) und den *Lösungen* gibt es noch „*Hinweise zur Lösungsfindung und Darstellung der Lösung*“, die vor allem dem Betreuer bei seiner Arbeit helfen sollen.

Hinweise zur Betreuung

Vor allem geht es darum, den Schüler zum *selbständigen Lösen problemhafter Aufgaben* anzuregen.

Der Betreuer sollte jeweils etwa 3 bis 5 geeignete Aufgaben zum Bearbeiten auswählen und dem Schüler einen Termin zum Besprechen seiner Lösungsversuche nennen. Wenn der Schüler glaubt, eine Lösung gefunden zu haben, soll er trotzdem die zugehörige *Lösung durcharbeiten*, um im Laufe der Zeit auch die *Technik der Lösungsdarstellung* zu erlernen. Wenn er keine Lösung gefunden hat, soll der Betreuer ihm die „*Hinweise zur Lösungsfindung*“ erläutern und ihn zu einem neuen Lösungsversuch auffordern.

Die Aufgaben der vier Aufgabengruppen sind jeweils nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet. Dies trifft auch auf die angegebene Reihenfolge der Aufgabengruppen zu. Die zur Bearbeitung ausgewählten Aufgaben sollten aus mindestens zwei dieser Aufgabengruppen entnommen werden.

Im Teil 2 der Aufgabensammlung werden die Aufgabengruppen Zahlentheorie (Aufgaben, die mit Hilfe von Kongruenzen zu lösen sind), Kombinatorik / Logik (Aufgaben zum Dirichlet-schen Schubfachschluss) und Geometrie (auch Konstruktionsaufgaben) durch weitere Aufgaben ergänzt. Neu hinzu kommt die Aufgabengruppe „Indirekte Beweise“.

Beim Betreuen sollte man sich stets vergegenwärtigen, welche **didaktischen Ziele** man erreichen möchte (vgl. auch den Abschnitt „8. Zur didaktischen Zielstellung“ im Material für Schüler der Klassen 6/7).

Bereits im Material für die **Klassen 5/6** sind dies folgende Ziele:

- Verwenden von *Tabellen* als heuristisches Hilfsmittel und beim Darstellen von Lösungen
- Verwenden von *Mengendiagrammen* beim Lösen einschlägiger Aufgaben
- Übergang von einem *Lösungsschema* zu einer sprachlich gefälligeren Darstellung, bei der jedoch die logische Struktur der Lösung deutlich sichtbar bleibt
- *Einzigkeits-* und *Existenznachweis* bei Aufgaben des Typs „Ermittle alle Elemente, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen“
- Einführen von *günstigen* Bezeichnungen; Übersetzen *aus der Wortsprache in eine Zeichensprache* (speziell in die Sprache der *Gleichungen*)
- Beim *systematischen Probieren* (Ermitteln aller möglichen Fälle) stets ein *Ordnungsprinzip* verwenden (lexikografisch, der Größe nach u.ä.)
- Bevorzugen der Lösungsstrategie *Folgern aus gegebenen Bedingungen*, dabei Suche nach der „*informativsten Bedingung*“
- Ein Verfahren zum Ermitteln der *Summe einer endlichen arithmetischen Reihe*

In den **Klassen 6/7** werden diese Ziele auf einem höheren Leistungsniveau weiter verfolgt. Neu hinzugekommen sind folgende Ziele:

Neben dem bereits bekannten *Vorwärtsarbeiten (VA)* (Folgern aus gegebenen Bedingungen) spielt vor allem bei geometrischen Aufgaben das *Rückwärtsarbeiten (RA)* eine wichtige Rolle. Der Schüler soll lernen, die *Hilfsmittelfrage* und die *Teilzielfrage* beim *kombinierten RA und VA* bewusst einzusetzen.

Dem Schüler sollen die *Gemeinsamkeiten beim Lösen von Aufgaben* aus inhaltlich verschiedenen Aufgabenklassen bewusst werden.

Es gibt Sachaufgaben, logisch-kombinatorische Aufgaben, zahlentheoretische oder geometrische Bestimmungsaufgaben, durch deren Formulierung die *eindeutige Lösbarkeit* vorausgesetzt wird. Bei solchen Aufgaben ist eine Probe (Existenznachweis) aus logischer Sicht nicht erforderlich, meist aber sehr nützlich, um Fehler aufzuspüren. Wenn eine solche Probe zusätzlich verlangt wird, dann muss dies bei Sach- und Anwendungsaufgaben stets eine *Probe am Text* sein.

Alle derartigen Aufgaben können aber auch so formuliert werden, dass neben dem *Einzigkeitsnachweis* (einer Herleitung) auch ein *Existenznachweis* erforderlich ist. Dies ist bei folgenden Formulierungen der Fall:

- Ermittle *alle* Elemente, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen.
- *Weise nach*, dass die Aufgabe *eindeutig* lösbar ist.
- *Untersuche*, ob die Aufgabe *eindeutig* lösbar ist.

Um diese Gemeinsamkeit zwischen inhaltlich verschiedenen solchen Aufgaben hervorzuheben, werden in den vorgeschlagenen Lösungen stets die Bezeichnungen „I.“ und „II.“ verwendet und abschließend hervorgehoben: „Aus I. und II. folgt, dass die angegebenen Lösungen die einzigen Lösungen der Aufgabe sind“.

Man sollte von den Schülern verlangen, diese Art der Formulierung einer Lösung zu übernehmen.

Wir halten es auch für wichtig, dass die Schüler erkennen, dass auch geometrische Ortsaufgaben, Konstruktionsaufgaben sowie Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungs- oder Ungleichungssysteme, deren Lösungsmenge nicht durch äquivalentes Umformen ermittelt werden kann, zu dieser Aufgabenklasse gehören.

Einer Herleitung (Einzigkeitsnachweis) ist oft nicht zu entnehmen, ob alle gegebenen Bedingungen tatsächlich verwendet wurden oder ob auch „überflüssige Bedingungen“ vorkommen. Aufgaben, bei denen dies der Fall ist, nennt man „*überbestimmt*“.

Eine in der Herleitung nicht verwendete Bedingung kann mit den restlichen Bedingungen verträglich sein, sie kann aber auch einer dieser Bedingungen widersprechen. In diesem Fall hätte die Aufgabe keine Lösung.

Dies erklärt die *logische Notwendigkeit einer Probe* bei Aufgaben, bei denen die eindeutige Lösbarkeit nicht vorausgesetzt wird. Dies macht auch klar, dass stets eine Probe am Aufgabentext und nicht etwa nur für die Ansatzgleichung erforderlich ist.

Um die genannten Ziele zu erreichen, ist es günstig, die gegebenen *Bedingungen* am Beginn der Lösung etwa durch (a), (b), ... zu *bezeichnen* und unter Verwendung einer „*Symbolsprache*“ in einer „*Kurzform*“ festzuhalten.

Dies trifft auch für die ab Klasse 6/7 neu auftretenden *Beweisaufgaben* zu. Der Schüler muss erkennen, dass ein Beweis nicht nur aus einer Folge von unbegründeten Feststellungen bestehen darf, etwa in der Form „Es gilt, es gilt, es gilt Damit ist die Behauptung bewiesen.“. Aus logischer Sicht ist ein Beweis eine Folge von *Schlussfolgerungen* der Form „Aus ... folgt ... weil“, die nachweist, dass die Behauptung aus den Voraussetzungen folgt und daher der *Satz* bewiesen ist. Deshalb sollte man die Formulierung „damit ist die Behauptung bewiesen“ strikt vermeiden, denn es wird stets ein Satz bewiesen.

Diese logische Struktur lässt sich besonders deutlich durch die Darstellung des Beweises in Form eines dreispaltigen *Beweisschemas* festhalten, das der Form eines *Lösungsschemas* entspricht, wie dies der Schüler der Klasse 5/6 bereits kennen gelernt hat. Der ersten Spalte des Beweisschemas kann entnommen werden, woraus jeweils gefolgert wird und bei welchen Schlussfolgerungen die gegebenen Voraussetzungen jeweils benötigt werden. Auf diese Weise fallen die beiden am häufigsten vorkommenden Darstellungsfehler auf: Es ist nicht zu erkennen, aus welchen Voraussetzungen oder abgeleiteten Feststellungen gefolgert wird; es fehlt die Angabe des verwendeten Hilfsmittels (Satz, Definition, Regel). Außerdem werden auch Zirkelschlüsse bei dieser Form der Darstellung deutlich erkennbar.

Auch bei Beweisen wird man bald zu einer sprachlich gefälligeren Darstellungsform übergehen, bei der jedoch die logische Struktur eines Beweises ebenfalls deutlich sichtbar sein muss.

Bei Bestimmungsaufgaben kommen zu den Aufgaben mit konkreten Daten *parameterhaltige Aufgaben* hinzu.

Neu in Klasse 6/7 sind auch Aufforderungen, sich Wissen und Können aus dem Arbeitsmaterial für den Korrespondenzzirkel Mathematik für Klasse 7 anzueignen. In diesen Klassenstufen ist in der Regel eine Unterstützung und Kontrolle durch den Betreuer unerlässlich.

Bei Schülern aus den **Klassen 7/8** sollte sich der Betreuer zunächst die Lösungen ansehen, die sein Schützling bei der 3. Stufe der MO abgegeben hat, um feststellen zu können, wie weit dieser die *Technik der Lösungsdarstellung* bereits beherrscht.

Es ist keinesfalls erforderlich, vom Schüler zu jeder Aufgabe eine „druckreife“ schriftliche Darstellung der Lösung zu verlangen. Solange der Schüler die Technik der Lösungsdarstellung jedoch noch nicht beherrscht, sollte man dies in regelmäßigen Abständen fordern.

Alle für die Klasse 6/7 gestellten Ziele werden in Klasse 7/8 auf einem höheren Leistungsniveau weiter verfolgt.

Neu hinzugekommen ist folgendes Ziel: Der Schüler ist in der Lage, sich aus dem Arbeitsmaterial des KZM7 und KZM8 *selbständig Wissen und Können* auch auf Gebieten *anzueignen*, die nicht zum Unterrichtsstoff gehören. Der Schüler sollte diesbezüglich motiviert und kontrolliert werden.

Bei den **Sach- und Anwendungsaufgaben** soll der Schüler zeigen können, in welchem Maß er das Lösen solcher bereits seit der Klasse 5/6 gestellten Aufgaben beherrscht.

Mit Ausnahme der Aufgaben S3), S9), S10) und S12) wird durch deren Formulierung die *eindeutige Lösbarkeit vorausgesetzt*. Bei der S2) und S4) wird zusätzlich eine Probe gefordert.

Bei der S3) kann man überprüfen, ob der Schüler bereits selbst erkennt, dass durch die Anforderung „Weise nach, dass ...“ eine *Probe erforderlich* ist. Wenn dies nicht der Fall ist, dann sollte er im Arbeitsmaterial des KZM7 den Abschnitt „1.5. Das Lösen von Bestimmungsaufgaben“ noch einmal durchlesen. Bei der S9), S10) und S12) sollte man die Darstellung in der Form „I. ... II. Aus I. und II. folgt ...“ fordern.

Die S5) und S6) sind *parameterhaltige* Aufgaben, bei denen Werte des Parameters zu ermitteln sind, für welche die gesuchten Zahlen eine gegebene Bedingung erfüllen.

Bei der S7), S8) und S9) handelt es sich um eine *Bewegungsaufgabe*, eine *Leistungsaufgabe* und eine *Mischungsaufgabe*.

Mit Hilfe dieser Aufgaben kann man überprüfen, ob der Schüler die heuristischen Vorgehensweisen „*Einführen günstiger Bezeichnungen*“ und „*Übersetzen in die Sprache der Gleichungen*“ bereits beherrscht.

Das „*Folgern aus den gegebenen Bedingungen*“ sollte stets bevorzugt verwendet werden.

Das „*systematische Probieren*“ sollte nur eingesetzt werden, wenn es angemessen ist.

Bei den Aufgaben aus der **Zahlentheorie** sind mit Ausnahme der Z1), Z8) und Z9) alle vom Typ „*Ermittle alle ...*“, deren Lösung in der Form „I. ... II. Aus I. und II. folgt ...“ dargestellt wird.

Zur Z1) soll sich der Schüler an Hand des 1. Beiblatts zum Arbeitsmaterial für den KZM8 die *Potenzgesetze aneignen*.

Bei der Z3) und Z4) ist bei der Lösungsfindung *systematisches Probieren* günstig.

Bei der Suche nach einer Lösung der Z4) und der Z8) ist es günstig, zunächst einen *Spezialfall* bzw. eine *einfachere Aufgabe* zu lösen.

Bei der Z7) ist eine *günstige Wahl der Variablen* von entscheidender Bedeutung.

Zum Lösen der Z9) wird das *Verfahren zum Ermitteln der Summe einer endlichen arithmetischen Reihe* benötigt, das unter „Methode des Erstklässlers Gauß“ sowohl im Arbeitsmaterial zu den Aufgaben für die Klasse 5/6 als auch für Klasse 6/7 beschrieben wird.

Bei den Aufgaben aus der **Kombinatorik** steht das Erarbeiten des im Beiblatt „Kombinatorik“ enthaltenen Inhalts sowie das Anwenden der dort angegebenen *Formeln* für das Berechnen der Anzahl der *Permutationen*, *Kombinationen* und *Variationen* (ohne Wiederholung der Elemente) im Vordergrund. Diese Aufgaben sind so formuliert, dass die *eindeutige Lösbarkeit* vorausgesetzt wird.

In der K1) wird ein Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit verlangt. Wie auch bei der K7) und der K8) ist eine Lösung mit Hilfe der Formeln nicht möglich, hier führt nur das *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* zum Ziel.

Bei den Beweis- und Bestimmungsaufgaben aus der **Geometrie** steht im Vordergrund, die bei den geometrischen Aufgaben des Materials für Klasse 6/7 eingeführten heuristischen Vorgehensweisen des *kombinierten Rückwärtsarbeitens und Vorwärtsarbeitens* bei Verwendung der *Hilfsmittelfrage* und der *Teilzielfrage* sowie dem Einführen günstiger *Hilfslinien* oder *Hilfspunkte* zu üben und zu festigen.

Dazu gehört eine gezielte Wiederholung aus dem Unterricht bekannter Sätze und das Anzeigen noch unbekannter planimetrischer Sätze.

Großer Wert wird darauf gelegt, dass der Schüler für die im Aufgabentext angegebene Voraussetzungen oder Bedingungen *Bezeichnungen* einführt und sie bei Verwendung einer geeigneten *Symbolik* vor dem Beweis oder der Lösung in *Kurzform* festhält. Nur im Aufgabentext der G3) wird dem Schüler vorgeführt, wie dies aussehen kann.

Um zu überprüfen, ob der Schüler fähig ist, einen Beweis in Form eines *Beweisschemas* darzustellen, wird er in der G1) aufgefordert, dies zu tun. Bei allen anderen Aufgaben wird nur verlangt, dass die Darstellung der Lösung deren logische Struktur klar erkennen lässt.

In der G1) und der G4) wird der Schüler aufgefordert, Abschnitte des Arbeitsmaterials für den KZM7 durchzuarbeiten, beim Lösen der G3), G5) und G6) soll er sich weiteres Begleitmaterial ansehen.