Material zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klassen 5/6, Teil 2

Inhaltsverzeichnis

Kontaktadresse: hhw.koenig@t-online.de

Der Teil 2 des Materials ist für Schüler bestimmt, die an der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade (Kreisrunde im November) erfolgreich teilgenommen haben und die sich auf die 3. Stufe der MO (Landesrunde im Februar/März) vorbereiten wollen.

Im Regierungsbezirk Chemnitz verwenden wir noch eine Datei, mit deren Hilfe man (in Papierform) eine Aufgabensammlung in Form einer 16-seitigen Broschüre herstellen kann, die außer den Aufgaben auch das „Arbeitsmaterial für Teil 2“ enthält. Interessenten können diese Datei über die Kontaktadresse erhalten.

Für erfolgreiche Teilnehmer an der 3. Stufe der MO aus Klasse 6 bieten wir das „*Material zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klassen 6/7“ an,* das ebenfalls auf unserer Homepage www.bezirkskomitee.de angeboten wird.

Wir wären allen Nutzern unseres Materials für eine Information über dessen Einsatz nebst Einschätzung, gewonnenen Erfahrungen und entdeckten Fehlern sehr dankbar!

H i n w e i s e

Beachten Sie bitte auch die „Einleitung“ und die „Hinweise zur Betreuung“ aus dem Teil 1 dieses Materials.

Im Regierungsbezirk Chemnitz vertreten wir hinsichtlich der *Nutzung dieses Materials* folgende Meinung:
Wenn ein mathematisch interessierter Schüler über die Anforderungen des Unterrichts hinaus noch Zeit und Lust für eine außerunterrichtliche Tätigkeit hat, dann sollte er vor allem an dem ab Klasse 5 angebotenen *Korrespondenzzirkel Mathematik* teilnehmen, der folgende Ziele verfolgt:

- Entwickeln der *Fähigkeit zum problemlösenden Denken* durch bewusstes Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen
- Entwickeln der Fähigkeit zum *selbständigen Erwerb von Wissen und Können* mit Hilfe von Literatur (Erhöhung der „Studierfähigkeit“)

Schüler sind in Klasse 6 noch nicht in der Lage, derartiges Material selbständig zu nutzen. Falls kein Lehrer für eine Betreuung zur Verfügung steht, sollte ein Elternteil oder eine Person aus dem Bekanntenkreis diese Aufgabe übernehmen. Das von uns empfohlene Vorgehen bei der Betreuung findet man unter *„Hinweise zur Betreuung“* im Teil 1 des Materials.

Im Teil 1 wurden folgende *didaktische Zielstellungen* genannt:

- Verwenden von *Tabellen* als heuristisches Hilfsmittel und beim Darstellen von Lösungen
- Übergang von einem *Lösungsschema* zu einer sprachlich gefälligeren Darstellung, bei der jedoch die logische Struktur der Lösung deutlich sichtbar bleibt
- *Einzigkeits-* und *Existenznachweis* bei Aufgaben des Typs „Ermittle alle Elemente, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen“
- Einführen von *günstigen* Bezeichnungen; Übersetzen *aus der Wortsprache in eine Zeichensprache* (speziell in die Sprache der *Gleichungen*)
- Beim *systematischen Probieren* (Ermitteln aller möglichen Fälle) stets ein *Ordnungsprinzip* verwenden (lexikografisch, der Größe nach u.ä.)
- Bevorzugen der Lösungsstrategie *Folgern aus gegebenen Bedingungen*, dabei Suche nach der *„informativsten Bedingung“*

Diese Ziele werden auch im Teil 2 weiter verfolgt.

Im Abschnitt „Mengenlehre - Logik" werden in den Aufgaben 1) bis 3) *Mengendiagramme* als Hilfsmittel beim Lösen einschlägiger Aufgaben eingeführt. Dies wird im Teil 1 des Materials für Klasse 7 wieder aufgegriffen.

In der Fortführung des Abschnitts „Zahlen werden gesucht" wird das *Verfahren des Erstklässlers Gauß* eingeführt und angewendet. Auch dies wird im Teil 1 des Materials für Klasse 7 wieder aufgegriffen.

In der Fortführung des Abschnitts „Kombinatorik" spielt wieder das *systematische Ermitteln aller Möglichkeiten* verbunden mit dem Einsatz von *Tabellen* eine wichtige Rolle. Es ist jedoch sehr wichtig, dass sich der Schüler auch die für kombinatorische Aufgaben typische Methode des *Folgerns aus den gegebenen Bedingungen* aneignet, wie es in den Aufgaben 2c), 5), 6), 8) und 9) aus Teil 1 gezeigt wird und in der abschließenden Aufgabe 17) überprüft werden soll.

Im neuen Abschnitt „Geometrie" spielt bei den Aufgaben 3), 5) und 8) das Anfertigen von ebenen oder räumlichen *Abbildungen* eine wichtige Rolle. Beim Lösen der Aufgaben 6), 7) und 8) kann man erstmals die Strategie des *Rückwärtsarbeitens* in Verbindung mit dem Vorwärtsarbeiten (Folgern) demonstrieren. Bei den Aufgaben 7) und 8) wird - „zur Erinnerung" - für die Darstellung der Lösung ein *Lösungsschema* verwendet.

Arbeitsmaterial für Teil 2 der Aufgaben zur Vorbereitung auf die LMO, Klasse 5/6

Die Methode des Erstklässlers Gauß zum Berechnen des Wertes spezieller Summen

Aufgabe:

Ermittle den Wert der Summe aus 13 Summanden, deren erster Summand die 17 ist und bei der die Differenz zwischen aufeinander folgenden Summanden stets 3 beträgt.

Lösung:

Nach Aufgabenstellung ist der letzte Summand die Zahl $(17 + 12 \cdot 3 =)$ 53.
Bezeichnet man den Wert der Summe mit S, dann gilt

$$\begin{array}{rcl} S &=& 17 + 20 + 23 + \ldots + 50 + 53 \qquad \text{(13 Summanden)} \\ +S &=& 53 + 50 + 47 + \ldots + 20 + 17 \\ \hline 2 \cdot S &=& 70 + 70 + 70 + \ldots + 70 + 70 \end{array}$$

Hieraus folgt $2 \cdot S = 70 \cdot 13$, also $S = 70 \cdot 13 : 2 = 455$.

Diese Methode hat der Erstklässler Gauß entdeckt, als er die Summe der Zahlen von 1 bis 100 berechnen sollte. Sie ist bei allen Summen anwendbar, bei denen die Differenz aufeinander folgender Summanden stets dieselbe Zahl ist.

Bezeichnet man mit a den ersten Summanden, mit d die konstante Differenz und mit n die Anzahl der Summanden, dann gilt folgende Formel:

$$S = a + (a + d) + (a + 2 \cdot d) + \ldots + [a + (n - 1) \cdot d] = \tfrac{n}{2} \cdot [2 \cdot a + (n - 1) \cdot d].$$

Es wäre jedoch unangemessen, sich diese Formel einprägen zu wollen; viel einfacher ist es, sich die *Methode* einzuprägen. Dagegen lohnt es, sich die folgende *Gaußsche Summenformel* einzuprägen, die man mit Hilfe der Methode leicht herleiten kann:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \tfrac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1).$$

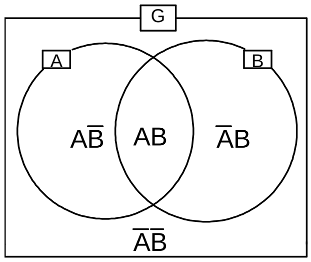
Offensichtlich folgt aus der Aufgabenstellung, dass die Differenz aus dem letzten und dem ersten Summanden stets ein Vielfaches von d sein muss. Dies kann dazu verwendet werden, zu überprüfen, ob der letzte Summand richtig berechnet oder angegeben wurde.

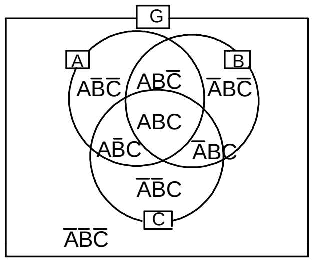
Mengendiagramme

Wir führen folgende *Bezeichnungen* ein:

G: Anzahl der Elemente der „Gesamtmenge“
A: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a haben
AB: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a *und* auch die Eigenschaft b haben
$A\overline{B}$: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a haben *und* die Eigenschaft b *nicht* haben
$\overline{A}\,\overline{B}$: Anzahl der Elemente, welche die Eigenschaft a *nicht* haben *und* auch die Eigenschaft b *nicht* haben

Kommen mehr als zwei Eigenschaften vor, dann wird analog bezeichnet.





Durch die angegebenen *Venn-Diagramme* lassen sich mengentheoretische Gesetzmäßigkeiten gut veranschaulichen. So gilt z.B.

$$G = AB + A\bar{B} + \bar{A}B + \bar{A}\bar{B}\,, \quad A = AB + A\bar{B}\,, \quad B = AB + \bar{A}B\,;$$

$$AB\bar{C} = AB - ABC\,, \quad A\bar{B}\bar{C} = A - (ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C)\,.$$

Die **Wahrscheinlichkeit P eines zufälligen Ereignisses E**

wird wie folgt definiert: $\quad P(E) =_{Df} \dfrac{\text{Anzahl der "günstigen" Fälle}}{\text{Anzahl der "möglichen" Fälle}} = \dfrac{g}{m}\,.$
