

# Material zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klasse 7, Teil 2

Inhaltsverzeichnis	Seiten- anzahl
1. Hinweise zur Betreuung	5
2. Aufgaben (einschließlich Arbeitsmaterial)	8
2.1 Zahlentheorie	(9 Aufgaben) (Z)
2.2 Geometrie	(13 Aufgaben)(G)
3. Lösungen	14
4. Hinweise zur Lösungsfindung und zur didaktischen Aufbereitung	<u>6</u>
	33

Kontaktadresse: [hww.koenig@t-online.de](mailto:hww.koenig@t-online.de)

Hiermit gestatten wir den Besuchern unserer Seite, sich dieses Material von unserer Homepage zum persönlichen Gebrauch herunter zu laden.

Dieses Material knüpft an den Teil 1 des Materials für Schüler der Klassen 6/7 an, das man ebenfalls auf unserer Homepage [www.bezirkskomitee.de](http://www.bezirkskomitee.de) findet. Es wird fortgeführt durch analoges Material für Schüler der Klassen 7/8.

Dieses Material ist für Schüler bestimmt, die nach der erfolgreichen Teilnahme an der 3. Stufe der MO in Klasse 6 begonnen haben, sich mit dem Teil 1 des Materials auf die 3. Stufe der MO in Klasse 7 vorzubereiten und die bei der 2. Stufe der MO in Klasse 7 startberechtigt sein sollten (Eltern bzw. Betreuer informieren den Organisator).

Das Verwenden des Teils 2 ist keinesfalls nur dann sinnvoll, wenn der Schüler den Sprung in die 3. Stufe der MO geschafft hat. Entscheidend ist allein der Wille des Schülers, auch weiterhin erfolgreich an der Mathematik-Olympiade teilzunehmen.

Die Aufgaben wurden bewusst (bei Verwendung einer größeren Schrift) auf genau 8 Seiten untergebracht, so dass man für den Schüler durch Verwenden des „Broschürendrucks“ und Falten von zwei beidseitig bedruckten Blättern eine gut handhabbare Aufgabensammlung herstellen kann.

Wir wären allen Nutzern dieses Materials für eine Information über dessen Einsatz nebst Einschätzung, gewonnenen Erfahrungen und entdeckten Fehlern sehr dankbar!

## Hinweise zur Betreuung

Beachten Sie bitte auch die „Einleitung“ und die „Hinweise zur Betreuung“ aus dem Teil 1 dieses Materials.

Wir bieten den Eltern den Teil 2 der Aufgabensammlung bereits zu Beginn des neuen Schuljahrs an, obwohl wir keinesfalls annehmen, dass bis zu diesem Zeitpunkt die Nutzung der Aufgaben des Teils 1 bereits abgeschlossen ist. Wir sind auch nicht der Meinung, dass man alle 37 Aufgaben des Teils 1 lösen lassen sollte, bevor man die Aufgaben des Teils 2 einsetzt. Wir empfehlen jedoch, spätestens Anfang Oktober nur noch Aufgaben des Teils 2 zu stellen, damit bis zur 3. Stufe der MO noch 5 Monate zur Verfügung stehen, sich mit diesen schwereren Aufgaben zu beschäftigen.

Wir wiederholen die diesbezüglichen Hinweise aus dem Teil 1 des Materials speziell für die Betreuer, die mit dem Teil 2 einsteigen. Die neuen Informationen findet man auf den Seiten 4 bis 5.

Bei den **Sachaufgaben** ging es im Teil 1 vor allem darum, den Schüler mit der heuristischen Strategie „*Übersetze in die Sprache der Gleichungen*“ vertraut zu machen, verbunden mit dem *Einführen günstiger Bezeichnungen*.

Ferner lernt der Schüler mit den Aufgaben S1) bis S12) einen Aufgabentyp kennen, bei dem durch Formulierungen der Form „Wie viele ...“, „Wann ...“, „Wie lange ...“, „Berechne ...“ u. ä. mitgeteilt wird, dass die Aufgabe genau eine Lösung hat. Bei solchen Aufgaben ist eine Probe (zum Entdecken von Fehlern zwar sehr nützlich aber) aus logischer Sicht nicht erforderlich. Lediglich die S13) gehört nicht zu diesem Typ, da hier „Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln lässt, ...“ gefordert wird.

Bei der S3) wurde eine Probe ausdrücklich gefordert, um hervorzuheben zu können, dass eine Probe für die Ansatzgleichung nicht ausreicht, sondern stets eine *Probe am Text* erforderlich ist. Nur auf diese Weise kann abgesichert werden, dass beim Übersetzen in die Sprache der Gleichungen kein Fehler gemacht wurde.

Bei den Aufgaben zu **Logik / Kombinatorik** ging es im Teil 1 vor allem darum, dem Schüler das *Übersetzen in eine Symbolsprache*, verbunden mit dem *Einführen günstiger Bezeichnungen* beizubringen.

Bei den Aufgaben L1), L3), L4), L5), L8) und L9) sind Zuordnungen zu ermitteln. Hier sollen *Tabellen* als Hilfsmittel bei der Lösungsfindung eingesetzt werden. Der Schüler muss jedoch wissen, dass eine derartige Tabelle eine vollständige und korrekte Darstellung der Lösung nicht ersetzen kann. Analoges gilt für *Mengendiagramme*, die beim Lösen der Aufgaben L2), L6) und L7) eingesetzt werden sollen.

Mit Ausnahme der L3) sind bei allen Aufgaben mindestens 4 und höchstens 12 Bedingungen gegeben. Beim Lösen derartiger Aufgaben ist die *Suche nach einer möglichst informativen*

*Bedingung* erforderlich, aus der man die erste Feststellung, dann die zweite Feststellung usw. folgern kann. Bei schweren Aufgaben muss man die Bedingungen mehrfach durchmustern, bevor man ans Ziel gelangt.

Nur bei den Aufgaben L1), L2), L3) und L6) wird die eindeutige Lösbarkeit vorausgesetzt. In der L7) wird „Weise nach, dass sich ... eindeutig ermitteln lassen“ gefordert, bei den restlichen Aufgaben wieder „Untersuche ob ...“.

Beim Lösen der Aufgaben Z1), Z2), Z3), Z7), Z8), Z11) und Z12) aus der **Zahlentheorie** konnte das *Übersetzen aus der Wortsprache in eine Zeichensprache* geübt und gefestigt werden (vgl. Seite 13 der Aufgabensammlung Teil 1 für die Schüler, „Zum Beweisen von Sätzen aus der Teilbarkeitslehre“).

Die Aufgaben Z3) bis Z7) gehören zum Typ „*Ermittle alle Elemente, die folgende Bedingungen erfüllen: ...*“. Hier hat der Schüler die Begriffe „*Einzigkeitsnachweis* (begründete Herleitung)“ und „*Existenznachweis* (Probe)“ kennen gelernt (vgl. Seite 12 der Aufgabensammlung Teil 1 für die Schüler, „Einige mathematische und logische Grundlagen“). Dabei ist das Einprägen dieser Namen unwichtig. Wesentlich ist das Erfassen der Lösungsstruktur „I. ..., II. ..., aus I. und II. folgt ...“ und die Erkenntnis, dass der Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit einer Aufgabe dieselbe Lösungsstruktur hat. Man sollte vor Beginn der Beschäftigung mit den Aufgaben des Teils 2 nachprüfen, ob der Schüler schon in der Lage ist, an der Formulierung der Aufgabe zu erkennen, ob deren Lösung diese Struktur haben muss. Es ist daher günstig, die Aufgabe Z3 vor den Aufgaben L7), L8), L9) und S13) lösen zu lassen.

Die Aufgaben Z8) bis Z12) sind die ersten *Beweisaufgaben*, mit denen der Schüler im Rahmen dieses Materials konfrontiert wird. Auch hier geht es zunächst darum, die Voraussetzungen und die Behauptung *aus der Wortsprache in eine Zeichensprache zu übersetzen*. Dem Schüler sollten die Gemeinsamkeiten und die Unterschiede zwischen Beweis- und Bestimmungsaufgaben bewusst werden.

Aus dem Gebiet der **Geometrie** werden nur 6 Aufgaben gestellt, die Bestimmungsaufgaben G1) bis G4) und die Beweisaufgaben G5) und G6). Auch hier wird das *Übersetzen aus der Wortsprache in die Zeichensprache* geübt. Bei den Aufgaben G2), G3) und G4) wird zum ersten Mal die Strategie des *Rückwärtsarbeitens* eingesetzt.

Ein wichtiges Ziel der Vorbereitung auf die 3. Stufe der MO ist das Entwickeln der Fähigkeit zum **Darstellen der Lösung** einer Aufgabe.

Ein sehr häufig auftretender Darstellungsfehler besteht darin, dass die angegebene Lösung nur aus einer Aneinanderreihung unbegründeter Feststellungen besteht. Eine korrekte Lösung besteht jedoch im Prinzip stets aus einer Folge von Schlussfolgerungen der Form „Aus ... folgt ... weil ...“, deren logische Struktur in Form eines *Lösungsgraphen* dargestellt werden

kann (vgl. Seite 15 der Aufgabensammlung Teil 1 für Schüler, „Struktur von Aufgaben und Lösungen“).

Als ein sehr günstiges didaktisches Hilfsmittel haben sich *Lösungsschemata* und *Beweisschemata* bewährt. Dabei handelt es sich jeweils um ein dreispaltiges Schema, in dem jede abgeleitete Feststellung mit einer Nummer bezeichnet wird. In der ersten Spalte werden die mit (a), (b), ... bezeichneten gegebenen Bedingungen bzw. die mit  $V_1$ ,  $V_2$ , ... bezeichneten Voraussetzungen und / oder die Nummern der abgeleiteten Feststellungen angegeben, aus denen geschlussfolgert wird. In der zweiten Spalte wird die abgeleitete Feststellung festgehalten. In der dritten Spalte werden die bei der Herleitung verwendeten Sätze, Definitionen, Formeln, Regeln oder andere Begründungen angegeben.

Die Lösung zu folgenden Aufgaben werden in Form eines solchen Schemas dargestellt: S10), S11), L1), L4), L5), Z4), Z5), Z8) bis Z12), G1) bis G6). Die Aufgaben L1) und L8) können zur Einführung des Lösungsschemas bzw. Beweisschemas verwendet werden. Man sollte darauf dringen, dass der Schüler die Lösungen der restlichen genannten Aufgaben in dieser schematischen Form darstellt.

Soweit die Wiederholung der „Hinweise für Betreuer“ aus dem Teil 1 des Materials

Es empfiehlt sich, vor Beginn des Einsatzes von Teil 2 des Materials mit dem Schüler eine **Zusammenfassung des Teils 1** durchzuführen. Dazu gehört zunächst ein nochmaliges Durcharbeiten des auf den Seiten 12 bis 16 der Aufgabensammlung angegebenen *Arbeitsmaterials* sowie im Arbeitsmaterial für den KZM7 die Abschnitte 1.3. (Aussageformen), 1.5. (Das Lösen von Bestimmungsaufgaben) und 3.2. (Teilbarkeitslehre). Ferner sollte man in Verbindung mit dem Wiederholen passend gewählter Aufgaben/Lösungen dem Schüler die oben angegebenen *heuristischen Hilfsmittel und Strategien* sowie die verschiedenen *Aufgabentypen* bewusst machen.

Im **Teil 2** kommen nur noch *zahlentheoretische* und *geometrische Aufgaben* vor.

Man beachte den Vorspann zu den Aufgaben aus der Zahlentheorie. Hier wird vom Schüler ein konkretes „*Literaturstudium*“ verlangt und er wird aufgefordert, die Lösung der Aufgaben Z17) bis Z21) in Form eines *Beweisschemas* darzustellen.

Die Aufgaben Z13), Z14) und Z15) aus der **Zahlentheorie** dienen der Wiederholung. Beim Lösen der Z13c) und Z14) ist eine *vollständige Fallunterscheidung* erforderlich. Die Lösungen der Z13b) und Z15) haben die Struktur „I., II., aus I. und II. folgt ...“. Bei der Z15) ist die *Suche nach einer möglichst informativen Bedingung* erforderlich und der Schüler wird aufgefordert, die Lösung in Form eines *Lösungsschemas* festzuhalten.

Bei der Z16) wird der Schüler aufgefordert, sich aus dem Arbeitsmaterial des KZM7 den Abschnitt 3.3. (*Das Rechnen mit Kongruenzen*) zu erarbeiten, wobei ihn der Betreuer unterstützen sollte. Bei den Aufgaben Z19), Z20) und Z21) soll dieses Hilfsmittel eingesetzt werden.

Bei der Aufgabe Z20) kann *Rückwärtsarbeiten* hilfreich sein.

Bei den Aufgaben aus der **Geometrie** gibt es die Beweisaufgaben G7) bis G14) und die Konstruktionsaufgaben G15) bis G19).

Mit Ausnahme der G12), bei der die *Hilfsmittelfrage beim Vorwärtsarbeiten* zum Ziel führen kann, empfiehlt sich bei der G13) die *Teilzielfrage beim Rückwärtsarbeiten* und bei den restlichen Aufgaben die *Hilfsmittelfrage beim Rückwärtsarbeiten*.

Die Konstruktionsaufgaben und deren Lösung werden stets so formuliert, dass ihre Zugehörigkeit zum Aufgabentyp „*Ermittle alle ...*“ deutlich sichtbar wird.

Bei der Aufgabe G15) führt die *Methode der geometrischen Örter* zum Ziel, bei den Aufgaben G16) bis G19) benötigt man die *Methode der Hilfselemente*.

Beim Erarbeiten der Abschnitte 1.4. (Das Beweisen von Sätzen) und 1.2. (Konstruktionsaufgaben) sollte der Betreuer den Schüler unterstützen.