Material zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klassen 5/6, Teil 1

Inhaltsverzeichnis

Kontaktadresse: hhw.koenig@t-online.de

Hiermit gestatten wir den Besuchern unserer Seite, sich dieses Material von unserer Homepage zum persönlichen Gebrauch herunter zu laden.

Das „*Material zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klassen 5/6, Teil 2*“ und das „*Material zur Vorbereitung auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade für Schüler der Klassen 6/7*“ findet man ebenfalls auf unserer Homepage www.bezirkskomitee.de.

Wir wären allen Nutzern dieses Materials für eine Information über dessen Einsatz nebst Einschätzung, gewonnenen Erfahrungen und entdeckten Fehlern sehr dankbar!

Einleitung

Dieses Material wurde vor allem für diejenigen Personen entwickelt, die mathematisch interessierte Kinder unterstützen, welche keine Möglichkeit haben, an Schularbeitsgemeinschaften, Korrespondenzzirkeln oder anderen Formen der außerunterrichtlichen Förderung teilzunehmen. Es kann auch von Lehrern genutzt werden, die in ihrer Region eine außerunterrichtliche Förderung für Schüler, die sich auf die Landesrunde der Mathematik-Olympiade vorbereiten möchten, aufbauen wollen. Dabei sei hervorgehoben, dass wir die Mathematik-Olympiaden nicht als Selbstzweck sondern nur als ein besonders effektives Hilfsmittel bei der Förderung mathematisch interessierter und begabter Schüler auffassen.

Den vorliegenden Teil 1 des Materials sollten die Eltern und Lehrer bei denjenigen Schülern einsetzen, die an der 3. Stufe (Landesrunde) der Mathematik-Olympiade für Klasse 5 (im Februar / März) erfolgreich teilgenommen haben. Wenn dies nicht der Fall ist, dann ist ein Einsatz zu Beginn des Schuljahrs in Klasse 6 für diejenigen Schüler geeignet, die sich auf eine Teilnahme an der 2. Stufe der Mathematik-Olympiade (im November) vorbereiten wollen.
Den Teil 2 dieses Materials sollte man bei denjenigen Schülern einsetzen, die an der 2. Stufe der MO für Klasse 6 (im November) erfolgreich teilgenommen haben, auf jeden Fall aber dann, wenn diese Schüler die 3.Stufe der MO erreicht haben.

Im Regierungsbezirk Chemnitz verwenden wir noch eine Datei, mit deren Hilfe man (in Papierform) eine Aufgabensammlung für Schüler in Form einer 16-seitigen Broschüre herstellen kann, die außer den Aufgaben auch das „Arbeitsmaterial für Teil 1“ enthält.
Interessenten können diese Datei über die Kontaktadresse erhalten.

Schüler sind zu Beginn der Klasse 6 noch nicht in der Lage, derartiges Material selbständig zu nutzen. Falls kein Lehrer für eine Betreuung zur Verfügung steht, sollte ein Elternteil oder eine Person aus dem Bekanntenkreis diese Aufgabe übernehmen. Das von uns empfohlene Vorgehen bei der Betreuung findet man unter „Hinweise zur Betreuung“.

Bei dieser außerunterrichtlichen Förderung mathematisch begabter und interessierter Schüler verfolgen wir vor allem die folgenden beiden *Ziele*:

- Entwickeln der *Fähigkeit zum problemlösenden Denken* durch bewusstes Vermitteln heuristischer Vorgehensweisen
- Entwickeln der Fähigkeit zum selbständigen Erwerb von Wissen und Können mit Hilfe von Literatur (Erhöhung der „Studierfähigkeit“).

Hinweise zur Betreuung

Vor allem geht es darum, den Schüler zum *selbständigen Lösen problemhafter Aufgaben* anzuregen.
Der Betreuer sollte jeweils etwa 3 bis 5 geeignete Aufgaben zum Bearbeiten auswählen und dem Schüler einen Termin zum Besprechen seiner Lösungsversuche nennen. Wenn der Schüler glaubt, eine Lösung gefunden zu haben, soll er trotzdem die zugehörige *Lösung durcharbeiten*, um im Laufe der Zeit auch die *Technik der Lösungsdarstellung* zu erlernen. Wenn er keine Lösung gefunden hat, soll der Betreuer ihm die „*Hinweise zur Lösungsfindung*" erläutern und ihn zu einem neuen Lösungsversuch auffordern.

Die Aufgaben der fünf Aufgabengruppen sind jeweils nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet. Dies trifft auch auf die angegebene Reihenfolge der Aufgabengruppen zu. Im Teil 2 der Aufgabensammlung kommen noch die Aufgabengruppen „Mengenlehre" und „Geometrie" dazu.
Bei der Auswahl der zu bearbeitenden Aufgaben sollten auch folgende *Zielstellungen* beachtet werden:

Der Schüler soll erkennen, dass eine Lösung (nicht aus einer Aneinanderreihung unbegründeter Feststellungen sondern) aus einer Folge begründeter Schlussfolgerungen der Form „Aus ... folgt ... weil" besteht, die vom Gegebenen ausgeht und beim Gesuchten endet. Am deutlichsten wird dies bei der Darstellungsform eines *Lösungsschemas* sichtbar (siehe die Aufgaben ZA1 - ZA4, Z1). Sprachlich gefälliger wird die Darstellung einer Lösung, wenn man die (durchnummerierten) Feststellungen am rechten Rand festhält (siehe ZA5, ZA6, ZA8, S2 - S4, S7, S12, S14).

Von großer Bedeutung ist der Aufgabentyp „*Ermittle alle Elemente, welche die gegebenen Bedingungen erfüllen*". Hier müssen ein Einzigkeitsnachweis I. und ein Existenznachweis II. erbracht werden. Dasselbe ist bei Aufgaben des Typs *„Weise nach, dass sich aus den gegebenen Bedingungen die Lösung eindeutig ermitteln lässt"* oder *„Untersuche, ob ... eindeutig ermitteln lässt"* der Fall (siehe ZA6 - ZA8, Z3 - Z8).
Bei vielen Aufgaben ist dem Aufgabentext zu entnehmen, dass es genau eine Lösung gibt. Hier ist aus logischer Sicht der Existenznachweis (die Probe) nicht erforderlich. Wenn eine Probe durchgeführt werden soll, muss dies explizit verlangt werden (siehe ZA1 - ZA5, alle Sachaufgaben, Z1, Z9, Z10 und alle Kombinatorik-Aufgaben).

Eine wichtige heuristische Strategie ist das *Übersetzen aus der Wortsprache in eine Zeichensprache*, wobei es darauf ankommt, *günstige Bezeichnungen* einzuführen (siehe alle Aufgaben ZA und K1 - K9). Ein Spezialfall dieser Strategie ist das *Übersetzen in die Sprache der Gleichungen* (siehe S1 - S5, S7 - S14, Z1, Z2, Z4 - Z10).

Erfahrungsgemäß bevorzugen die meisten Schüler zu Beginn der Klasse 6 als Lösungsstrategie das (oft unsystematische) *Probieren.* Um *systematisch* alle möglichen Fälle ermitteln zu können, ist es erforderlich, sich für ein bestimmtes *Ordnungsprinzip* (lexikografisch, der Größe nach, u.ä.) zu entscheiden (siehe Z10 und K1 - K3).
Die Schüler sollen in Klasse 6 erkennen, dass in den meisten Fällen das *Folgern aus den gegebenen Bedingungen* die effektivere Lösungsstrategie gegenüber dem systematischen Probieren ist.
Besonders interessant sind die 11 Aufgaben (aus ZA und Z), bei denen mehr als zwei und bis zu sechs Bedingungen gegeben sind. Dann wird es wichtig, die *„informativste“* Bedingung oder mehrere solche Bedingungen zu finden, aus denen man sofort etwas folgern kann.
Um den Schülern zu Beginn der Klasse 6 die Arbeit zu erleichtern, wurden bei 6 dieser Aufgaben die Bedingungen so angeordnet, dass die informativsten Bedingungen am Anfang stehen. Nur bei der ZA8 müssen die Schüler aus sechs Bedingungen die drei informativsten herausfinden.

Ein besonders nützliches heuristisches Hilfsmittel sind *Tabellen*.
Sie können zum übersichtlichen Festhalten der gegebenen Größen oder Bedingungen verwendet werden (siehe S5).
Beim systematischen Ermitteln aller Möglichkeiten kann man sie zum übersichtlichen Festhalten der ermittelten Ergebnisse verwenden (siehe S1, Z2, K2, K5, K6, K9).
Ferner eignen sie sich bei allen Zuordnungsaufgaben vorzüglich als Hilfsmittel zur Lösungsfindung (siehe das Arbeitsmaterial „Tabellen als Hilfsmittel beim Lösen von Zuordnungsaufgaben“ und die Hinweise zur Lösungsfindung bei der Z4 und Z5). Solche Tabellen können jedoch eine Darstellung der Lösung in Form von Folgerungen aus den gegebenen Bedingungen nicht ersetzen.

Es wäre ein schwerer didaktischer Fehler, erst alle Aufgaben der ersten Aufgabenklasse, dann die der nächsten Aufgabenklasse lösen zu lassen, usw. Man sollte vielmehr mit den leichten Aufgaben der ZA, S und Z beginnen. Nach einigen Wochen sollte man die leichten Aufgaben der K hinzunehmen.
Es ist keinesfalls erforderlich, bis zur 2. Stufe der MO alle Aufgaben zu lösen. Natürlich sollte man auch Wünsche des Schülers bei der Auswahl der Aufgaben berücksichtigen.

Arbeitsmaterial für Teil 1 der Aufgaben zur Vorbereitung auf die LMO, Klasse 5/6

Tabellen als Hilfsmittel beim Lösen von Zuordnungsaufgaben

- Führe für die Elemente der Mengen, die einander zuzuordnen sind, *günstige Bezeichnungen* ein, z.B. M_1 = {a, b, c, d, e} und M_2 = {A, B, C, D, E}.
  ° Wenn drei Mengen M_1, M_2 und M_3 gegeben sind, dann ist es günstig, für jedes der Paare [M_1, M_2], [M_1, M_3] und [M_2, M_3] eine Zuordnungstabelle anzufertigen.

- Wenn in der Aufgabenstellung die gegebenen Bedingungen nicht bereits als (1), (2), (3), ... oder (a), (b), (c), ... bezeichnet sind, dann führe solche *Bezeichnungen* ein.

- Fertige eine *Tabelle* an, in deren Zeilen- bzw. Spalteneingängen die einander zuzuordnenden Elemente stehen.

- Wenn aus einer Bedingung (*) folgt, dass eine Zuordnung (x, Y) gilt, dann trage in das zugehörige Feld der Tabelle ein „ +, (*)“ ein. Wenn jedoch folgt, dass diese Zuordnung nicht gelten kann, dann trage ein „ -, (*)“ ein.

- Wenn in einer Zeile oder Spalte in allen Feldern mit Ausnahme eines Feldes ein „-“ steht, dann trage in dieses Feld (als letzte verbleibende Möglichkeit) ein „+“ ein und gib dieser so ermittelten Zuordnung einen Namen (#). In die Felder der zugehörigen Spalte oder Zeile wird (da die gefundene Zuordnung eindeutig ist) ein „-, (#)“ eingetragen.

- Wenn die Aufgabe genau eine Lösung hat, dann kann man auf die angegebene Weise alle Felder der Tabelle füllen und hat so die Lösung gefunden.

Es gilt der folgende **Satz über die Division natürlicher Zahlen mit Rest**:
Zu jeder Zahl a (als Dividenden) und jeder von 0 verschiedenen Zahl m (als Divisor) gibt es stets genau eine Zahl q (als Quotienten) und eine Zahl r (als Rest), für die folgende Gleichung gilt:

$$a = m\cdot q + r \quad \text{mit} \quad 0 \le r \le m - 1 \; .$$

Beim **Lösen von Gleichungen** mit Variablen **durch *Umformen*** besteht das Ziel darin, die Gleichung schrittweise zu vereinfachen, bis sie die Form x = ... angenommen hat.
Um eine Gleichung zu *vereinfachen*, ist es gestattet,
- auf beiden Seiten der Gleichung eine Zahl zu addieren oder zu subtrahieren;
- beide Seiten der Gleichung mit einer *von 0 verschiedenen* Zahl zu multiplizieren oder durch eine solche Zahl zu dividieren;
- auf jeder Seite das Distributivgesetz $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$ anzuwenden und zusammenzufassen.

Beispiel:

$\frac{x}{6} - \frac{7}{15} = \frac{x+2}{10} + 1$	$\mid \cdot(2\cdot 3\cdot 5 =)\ 30$	[Brüche beseitigen]
$5\cdot x - 14 = 3\cdot(x + 2) + 30$	$\mid$	[Klammern lösen]
$5\cdot x - 14 = 3\cdot x + 6 + 30$	$\mid - 3\cdot x + 14$	[Zusammenfassen, Umformen]
$2\cdot x = 50$	$\mid :2$	[x isolieren]
$x = 25$		

Probe: LS: $\frac{25}{6} - \frac{7}{15} = \frac{125}{30} - \frac{14}{30} = \frac{111}{30} = \frac{37}{10}$ RS: $\frac{25+2}{10} + 1 = \frac{27}{10} + \frac{10}{10} = \frac{37}{10}$